Chap 4 : Multiplication et division dans l'ensemble des naturels

Apports théoriques

1. La multiplication

1.1 Produit de 2 naturels

Le produit de a par b est égal à la somme de b naturels égaux à a.
$a \times b = a+a+a+a+a\ldots+a$ (b termes)

Le produit de a par b est le nombre de couples (x;y) qui peuvent être réalisés en choisissant x dans un ensemble ayant a éléments et y dans un ensemble ayant b éléments.
Ex : E = {p,q,r} et F = {e,i,o,u} : on peur former 12 couples différents : {(p,e), (p,i), (p,o), …}

1.2 Propriétés de la multiplication

Distributivité de la multiplication sur l'addition :
Quels que soient les naturels a, b et c : $a \times (b+c) = (a\times b)+(a\times c) = ab + ac$

Associativité de la multiplication :
Quels que soient les naturels a, b et c : $a\times (bxc) = (a\times b) \times c = a\times b\times c = abc$.

Commutativité de la multiplication
Quels que soient les naturels a et b : $a \times b = b \times a$.

Existence d'un élément neutre (le naturel 1) et d'un élément absorbant (le naturel 0) :
On dit que 1 est un élément neutre pour la multiplication car quel que soit le naturel a on a $1\times a = a\times 1 = a$.
On dit que 0 est élément absorbant pour la multiplication car quel que soit le naturel a on a $0\times a = a\times 0 = 0$.

1.3 A propos de la technique opératoire de la multiplication

```
     368
×    207
_________
    2576   ← résultat du calcul de 368 × 7
   73600   ← résultat du calcul de 368 × 200
_________
   76176   ← résultat du calcul de la somme des 2 résultats précédents.
```

Cette technique exige l'utilisation de plusieurs types de connaissances :
- Tables de multiplication.
- Connaissances relatives à la multiplication (décomposition d'un nombre en centaines, dizaines et unités).
- Associativité de la multiplication et règle de multiplication par 100.
- Distributivité de la multiplication sur l'addition.

2. La division

2.1 Différentes divisions

La division euclidienne de deux naturels a et b (b≠0) est l'opération par laquelle on associe à a et b, les naturels q et r tel que :

A = (b×q)+r et r<b — a est le dividende, b est le diviseur, q est le quotient entier ou euclidien, r est le reste.

Cela revient aussi à situer a entre deux multiples consécutifs de b : b×q et b×(q+1)

La division dans l'ensemble Q des rationnels de a et b (b≠0) consiste à chercher la solution de l'équation a = b×x, où x est appelé quotient de a par b.
Dans l'ensemble Q cette équation admet toujours une solution unique.

2.2 Une propriété de la division

Le quotient entier (dans la division euclidienne) et le quotient (dans la division dans Q) ne changent pas quand on multiplie ou divise les deux termes de la division par un même nombre.
Dans Q : a/b = a×c / b×c

Aspects didactiques

1. Typologie des problèmes multiplicatifs et de division

1.1 A propos de la notion de « champ conceptuel »

Champ conceptuel = ensemble de situations dont le traitement implique des schèmes, concepts et théorèmes, en étroite connexion, ainsi que les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter.

Champ conceptuel des structures multiplicatives = problème qui peuvent être résolus en utilisant une multiplication, une division ou une suite de multiplications et de divisions (recouvre également les problèmes de proportionnalité).

1.2 Le champ conceptuel des structures multiplicatives

- Proportion simple, avec présence de l'unité :

1	c
b	d

  - Problèmes de multiplication (on donne b et c, on cherche d).
    Ex : J'ai collé 32 timbres sur chaque page d'un album de 14 pages. Combien y a-t-il de timbres dans l'album ?
  - Problèmes de division-partition (recherche de la « valeur d'une part »).
    Ex : J'ai collé 448 timbres dans un album de 14 pages. Il y a le même nombre de timbres sur chaque page. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ?
  - Problèmes de division-quotition (recherche du « nombre de parts »).
    Ex : J'ai collé 448 timbres dans un album. Il y a 14 timbres sur chaque page. Combien de pages ont été remplies ?

→ Toutes ces situations peuvent se modéliser par une écriture du type :
$c = b \times q$ ou $c = b \times q + r$ avec $r < b$ ou $b \times q \leq c < b \times (q+1)$
C'est le contexte qui impose ou non l'existence d'un reste.

→ Les nombres utilisés sont situés : soit dans un contexte ordinal, soit dans un contexte cardinal, soit dans un contexte de mesure.

- <u>Proportion simple, sans présence de l'unité</u>

- <u>Problème du type « fois plus, fois moins »</u>

- <u>Produit de mesures</u> :
    - Problèmes de multiplication.
      <u>Ex</u> : Quelle est l'aire d'un champ rectangulaire de84m sur 105m ?
    - Problèmes de division.
      <u>Ex</u> : Un rectangle de 13m de largeur a pour aire 256m².Quelle est sa longueur ?

- <u>Proportion double</u> : problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à 2 grandeurs indépendantes. Fait intervenir en général + d'1 calcul.
  <u>Ex</u> : pris à payer en fonction du nombre de personnes et de la durée d'un séjour.

- <u>Proportion simple composée</u> : problèmes relatifs à des situations dans lesquelles une grandeur varie proportionnellement à une autre qui varie, elle-même, proportionnellement à une 3ème.
  <u>Ex</u> : Dans un carnet de timbres, il y a 20 timbres. Chaque timbre coûte 2,80F.On achète 14 carnets.

2. <u>Les différentes procédures utilisées par les élèves</u>

2.1 <u>Pour résoudre les problèmes « de multiplication »</u>

- Si les nombres sont petits : (ex : 6 et 4)
    - Procédure utilisant le support d'un dessin ou schéma : puis dénombrement (1par 1 ou de 6 en 6).
    - Procédure additive : 6+6+6+6=24 ou 6/12/18/24 (addition n'est pas explicitée).
    - Procédure multiplicative : calcul mental cf. tables de multiplication.
- Si l'un des nombres est grand et l'autre petit : (ex : 48 et 6)
    - Procédures utilisant dessin deviennent très coûteuses.
    - Procédures de type additif sont efficaces.
    - Procédure multiplicative : très efficace.
- Si les nombres sont grands (ex : 64 et 34) :
    - Procédures de type dessin inutilisables.
    - Procédures de type additif très difficiles.
        - Moyens de calcul qui économisent le travail peuvent être trouvées par les élèves.
          Ex : $\underbrace{64 + 64}_{128} + \underbrace{64 + 64}_{128} + \ldots$
        - Procédures additives utilisant des multiples (doubles, produits par 10) ms calcul du nombre d'itérations est plus difficile.
    - Procédures multiplicatives : les + efficaces.

2.2 <u>Pour résoudre les problèmes « de division »</u>

Ex de problème : On range 273 œufs dans des boîtes de 12.Combien de boîtes peut-on remplir ?

- Procédures imagées : dessin figuratif ou dessin schématisé : devient très vite peu économique et difficile à gérer.

- Procédures progressives fondées sur l'addition ou la soustraction :
  - <u>Additions « pas à pas »</u> :
    12 +12 = 24
    24 + 12 = 36
    36 + 12 = 48, etc…
    ou
    12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60
    12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 60
    60 + 60 = 120, etc …
  - <u>Soustractions « pas à pas »</u> :
    273 – 12 = 261
    261 – 12 = 249, etc…

  → Ces procédures deviennent vite coûteuses avec des nombres assez grands. Certains élèves, parvenus à la fin de leurs calculs, ne savent plus comment retrouver le nombre de boîtes (surcharge cognitive).
  - <u>Additions ou soustractions de multiples du diviseur</u> :

48	273
+ 48	- 48
96	225
+ 48	- 48
144 etc	177 etc

    → Ces procédures deviennent plus efficaces quand l'élève à idée d'utiliser des multiples de 10.

→ Avec toutes ces procédures il faut à la fin retrouver le nombre de fois où 12 a été additionné ou soustrait.

- Procédures multiplicatives :
  - <u>Pose de la multiplication à trou</u> : procédure délicate quand le reste n'est pas nul.
  - <u>Essais de multiples successifs du diviseur</u> :
    12 × 10 = 120 ; 12 × 11 = 132, etc.… : procédure qui peut ê fastidieuse si l'élève a commencé son évaluation trop bas.
  - <u>Essais par approches successives</u> :
    12 × 30 = 360 ; 12 × 25 = 300 ; 12 × 20 = 240, etc… : l'efficacité de cette procédure dépend à la fois de la qualité de l'approximation effectuée au départ et des ajustements successifs.

- Procédures mixtes :
  - <u>Quotients partiels « au hasard »</u> :
    12 × 15 = 180 ; 273 – 180 = 93
    12 × 7 = 84 ; 93 – 84 = 9
    quotient : 15 + 7 = 22, reste 9.
  - <u>Utilisation de multiples de 10, 100… pour les quotients partiels</u> :
    12 × 20 = 240 ; 273 – 240 = 33

$12 \times 2 = 24$; $33 - 24 = 9$

- Utilisation de la division : reconnaissance du modèle expert dont relève le problème proposé.

3. Les principales variables didactiques

Pour les problèmes qui se résolvent par une multiplication ou une division :
- Le type de problèmes.
- Les types de nombres utilisés.
- La taille des nombres en jeu.
- Les outils de calcul disponibles ou non.
- Le type de contexte.
- La manière dont l'énoncé est formulé.

Pour les problèmes « de division » :
- La taille des nombres correspondant au dividende et au diviseur.
- La valeur du quotient : plus ou moins facile à calculer selon qu'il est ou non composé d'un seul chiffre ou qu'il s'exprime par un nombre entier de dizaines ou de centaines…
- L'existence ou non d'un reste non nul.

4. Apprentissage de la technique opératoire de la multiplication

4.1 Les difficultés rencontrées par les élèves

- Difficultés dues au fait que tous les résultats de la table ne st pas parfaitement mémorisés.
- Difficultés dans la gestion des retenues.
- Difficultés dans l'ordre des calculs à effectuer.
- Difficultés de « décalage » qui correspondent en fait à l'existence d'un 0 par exemple comme chiffre des dizaines.

4.2 Les étapes de l'apprentissage

Connaissances préalables nécessaires à l'apprentissage de la technique de la multiplication :
- Tables de multiplication.
- Décomposition des nombres en fonction de leur écriture en base 10 (ex : $507 = 500 + 7$).
- Repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre (unités, dizaines…)
- Capacité à remplacer un produit par une somme de produits.
  Ex : $438 \times 507 = (438 \times 7) + (438 \times 500)$
- Connaître la règle des 0.

5. Apprentissage de la technique opératoire de la division euclidienne

Les difficultés spécifiques de la technique usuelle :
- Exige d'effectuer simultanément des divisions, des multiplications et des soustractions : nécessite bonne aisance en calcul mental et maintien en mémoire de nombreux résultats partiels.
- Les chiffres écrits successivement pour constituer le quotient st le résultat d'une approximation qui peut conduire à essayer un chiffre erroné, donc provisoire.