

Chap 3 : Les entiers naturels et leurs désignations

✓ Apports théoriques

1. Mémoriser, désigner des quantités

- Il n'est pas nécessaire de connaître les nombres et leurs désignations pour percevoir les quantités (ex : correspondance terme à terme mais les informations concernant les quantités ne peuvent être transmises ni mémorisées).
- Comment garder la trace d'une info quantitative ?
 - o **Construire par correspondance terme à terme une collection intermédiaire équipotente** à la collection de référence. Il faudra utiliser la correspondance terme à terme pour la construction de toute nouvelle collection équipotente à la collection de référence. (ex : jetons, bâtons figuratifs...)
 - o **Utiliser comme collection intermédiaire un ensemble de signes ou de mots différents**, ensemble organisé en une suite stable et conventionnelle (ex : $a, b, c, d, e, f...$: il suffit de mémoriser le dernier signe de la suite) : la quantité est devenue communicable en plus d'être mémorisée.

2. Du fini à l'infini : les différents choix possibles

2.1 Numérations de type additif

Ex : la numération romaine. Peu de signes :

$I = 1$; $V = 5$; $X = 10$; $L = 50$; $C = 100$; $D = 500$; $M = 1000$.

Les règles de construction des écritures des autres nombres se réduisent d'abord à de simples additions de signes juxtaposés puis règle « tout signe placé à gauche d'un signe de valeur supérieure s'en retranche ».

2.2 Numérations de position

- 3 principes de base :
 - o **La valeur d'un signe dépend de sa position** dans l'écriture du nombre.
 - o Cette valeur représente un **groupement d'unités inférieures qui sont échangées contre un élément de l'unité immédiatement supérieure**.
 - o Le **groupement est régulier** : un groupement contient toujours le même nombre d'éléments pour être échangé contre l'unité supérieure. La valeur de cet échange s'appelle la base.
- 2 principes complémentaires :
 - o Un nombre de signes différents égal à la base.
 - o Un des signes doit marquer l'absence de groupement d'une unité ; c'est le zéro.
- Dans notre système, la base est dix.

3. Numération et techniques opératoires

3.1 Que « retient-on » dans les additions ?

$$\begin{array}{r} 11 \\ 37 \\ +95 \\ \hline 132 \end{array}$$

Se dit : 5 et 7, 12, je pose 2 et je retiens 1. Cette 1^{ère} « retenue » désigne une dizaine qui n'a pas sa place dans la « colonne » des unités et qui apporte une unité de plus dans celle des dizaines, etc...

3.2 Que signifient les « décalages » dans les multiplications ?

- « Règle des zéros » : pour multiplier un nombre par dix, il suffit de placer un 0 à sa droite.
→ multiplier un nombre par dix c'est faire en sorte qu'il y ait dix fois plus d'unités, dix fois plus de dizaines, dix fois plus de centaines, etc. Chaque unité devient donc un paquet de dix, ce qui se traduit dans l'écriture du nombre par la présence d'un zéro aux unités ou un « décalage » des chiffres vers la gauche.
- Dans la technique opératoire la plus utilisée en France, ce décalage est marqué de 2 façons possibles (un 0 ou un vide – ou point).

✓ Aspects didactiques

1. L'apprentissage des nombres

1.1 La question du sens : à quoi servent les nombres ?

2 grandes classes d'usage des nombres :

- Les nombres permettent de **conserver la mémoire de la quantité**.
- Les nombres permettent **d'anticiper le résultat de certaines actions sur les quantités** comme par exemple de prévoir ce que deviennent ces quantités si elles subissent certaines transformations, sans même réaliser ces transformations (ajouts, retraits...)
→ C'est l'absence (des objets, des quantités...) dans l'espace ou dans le temps qui crée la nécessité d'utiliser des nombres.
- Les manipulations d'objets réels ne favorisent pas l'utilisation des nombres, elles permettent au contraire de s'en passer. Mais elles sont essentielles de manière préliminaire pour que l'enfant comprenne la situation qui lui est proposée.
- La résolution d'un problème isolé ne permet pas à l'enfant de construire une procédure réutilisable dans d'autres circonstances : proposer des occasions variées d'utilisation de la même procédure + décontextualisation.

Plusieurs types de problèmes peuvent être proposés aux enfants de cycles 1 et 2 afin de leur permettre de construire le « sens » des nombres :

- **Problèmes d'équipotence ou de comparaison de 2 collections :**
 - o Construire une collection B équipotente à une collection A de référence.
 - o Construire une collection C à partir d'une collection de référence A de manière à ce que chaque élément a de A correspondent 2, 3, n éléments de C.
Ex : aller chercher 2 chaussons identiques pour chaque poupée.
 - o Comparer, du point de vue de la quantité d'objets qu'elles contiennent, 2 collections A et B.
 - o Compléter une collection B pour qu'elle soit équipotente à une collection A.
- **Problèmes de repérage ordinal :** les nombres sont utilisés comme mémoire de la position, pour se repérer dans une suite de case, dans des listes, etc.
- **Problèmes d'anticipation d'un résultat :**
 - o Trouver la quantité obtenue par la réunion de 2 ou plusieurs collections.
 - o Trouver le point d'arrivée, la valeur du déplacement ou le point de départ d'un pion se déplaçant sur une piste graduée.
 - o Rechercher le nombre d'éléments d'une des parties d'une collection en connaissant le nombre d'éléments de la partie complémentaire.
 - o A propos du partage d'une collection en collections équipotentes ou non, chercher la valeur d'une part en connaissant le nombre de parts à réaliser ou le nombre de parts si la valeur d'une part est donnée.

- Etudier les effets après échange d'objets de valeur différente sur la quantité d'objets avant et après l'échange et sur la valeur de ces objets.

1.2 Quelles procédures pour résoudre ces problèmes ?

La correspondance terme à terme

- Les problèmes qui portent sur l'équipotence ou la comparaison de collections peuvent se résoudre sans utilisation des nombres lorsque tous les objets sont présents.
- De cette procédure en découle une autre : la correspondance paquet à paquet : répartir les éléments de chacune des collections en sous-collections que l'on met en correspondance d'une collection à l'autre.
- **Variables didactiques : taille des collections, nature des objets (déplaçables ou non par exemple), compétences des élèves.**
- C'est une procédure de résolution indispensable pour des enfants qui ne savent pas encore dénombrer dans le champ numérique de la situation.
- Présente plusieurs difficultés d'utilisation :
 - Les 2 collections doivent être proches l'une de l'autre.
 - Les éléments des collections peuvent être déplaçables ou non : si aucun élément n'est déplaçable, il faut trouver une parade pour matérialiser le lien entre les divers éléments d'une collection à l'autre.
 - Certains objets, bien que déplaçables, vont poser d'autres problèmes dus à leur trop grande mobilité (billes, perles que l'enfant ne parvient pas à faire tenir à la place initiale).

L'estimation

Procédure de quantification, elle est de 2 sortes :

- **L'évaluation approximative** : quantification dont le sujet est conscient qu'elle n'est pas nécessairement exacte mais donne un bon ordre de grandeur.
- **Le « subitizing »** : reconnaissance immédiate de la quantité sans dénombrement explicite. Possible dans le cas de très petites collections ou dans celui de configurations géométriques particulières déjà rencontrées.

Le dénombrement

- Procédure de quantification utilisable dans presque tous les problèmes.
- Utilise une suite de mots mis en correspondance terme à terme avec les éléments de la collection considérée de telle sorte que le dernier mot utilisé suffise à garder la mémoire de la quantité.
- Difficile à utiliser sans erreur :
 - **Principe d'adéquation unique** : chaque mot énoncé doit être mis en stricte correspondance terme à terme avec un et un seul élément de la collection que l'on cherche à dénombrer.
 - **Principe d'ordre stable** : les mots utilisés doivent être énoncés dans un ordre strict.
 - **Principe cardinal** : le dernier mot de la suite suffit à garder la trace de la quantité.
 - **Principe d'abstraction** : on peut comparer des objets disparates.
 - **Principe de non-pertinence de l'ordre** : l'ordre dans lequel les éléments sont pris en compte est sans importance.

Autres procédures

- **Le recomptage** : pour savoir combien il y a de cubes dans une boîte qui en contenait déjà 5 et à laquelle on en ajoute 3, l'enfant recompte l'ensemble des 2 collections à partir de 1 :
 - Soit en vidant la boîte et en recomptant tout.

- Soit en se construisant une collection intermédiaire comme en levant 5 doigts puis 3 et en recomptant tous les doigts.
- **Le décomptage** = comptage décroissant.
- **Le surcomptage** : l'enfant va retenir le nombre 5 qui décrit la 1^{ère} collection et continuer le comptage des 3 éléments de la 2^{ème} collection à partir de 6.
→ c'est une procédure que les enfants doivent apprendre pour ensuite s'en passer.
- **Le double comptage** : faire avancer 2 suites numériques décalées en même temps.

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 2 & 3 \\ & & 25 & 26 & 27 & 28 \end{array}$$

Ex : jeu de l'oie : 3 au dé, pion sur la case 25 :

Les procédures de calcul

Ex : pour calculer $67 + 28$ les procédures présentes ne suffisent plus.

- **Recours à un algorithme appris et mémorisé** : technique opératoire de l'addition.
- **Recours à un outil mathématique de calcul** (calculatrice par exemple).
- **Recours au calcul réfléchi** s'appuyant sur des décompositions de chacun des nombres en présence et l'utilisation de quelques faits numériques mémorisés.

Ex : $67 + 28 = 60 + 7 + 20 + 8 = 60 + 20 + 7 + 8$

60 + 20 peut être obtenu à partir de 6 dizaines et 2 dizaines et de $6 + 2 = 8$.

7 + 8 peut être compté ou su par cœur.

1.3 Quelques variables didactiques

- **Les collections** :
 - **L'éloignement ou la proximité** des collections à comparer ou à construire.
 - **La taille** de chaque collection en jeu.
- **Les éléments des collections** :
 - **Leur mobilité** : déplaçables ou non.
 - **Leur disposition** : en ligne, en vrac, sur une courbe fermée...
 - **Leurs dimensions absolues et relatives** : par exemple s'il s'agit de construire une collection équipotente à celle des points du dé, le fait que les éléments puissent être posés sur chaque point du dé ou non.
- **Les nombres** :
 - **Domaines numériques** :
 - Domaine des petits nombres.
 - Domaine des nombres fréquentés ans la vie courante (jusque 30 environ pour des enfants de 5 ou 6 ans).
 - Domaine des grands nombres.
 - **Taille relative** : l'écarte entre les nombres.
- **La mise en œuvre**

1.4 Nombres et mots-nombres

→ cf. Karen Fuson

- **3 contextes « mathématiques »** :
 - **Contexte cardinal** où le mot-nombre « quantifie » une collection d'éléments discontinus (« voilà 2 biscuits »).
 - **Contexte ordinal** où le mot-nombre décrit l'ordre d'un élément dans une collection d'éléments ordonnés (« prends le deuxième livre »).
 - **Contexte de mesure** où le mot-nombre indique le nombre d'éléments nécessaires, pris pour unités, pour « remplir » l'objet considéré (« tu as 2 ans aujourd'hui »).
- **2 contextes « séquentiels »** :
 - **Contexte de séquence** où chaque mot est un élément d'une suite ordonnée sans référence à une quelconque réalité : un, deux, trois, quatre...

- **Contexte de dénombrement** dans lequel les mots-nombres, organisés en suite stable et conventionnelle, sont mise en correspondance terme à terme avec les éléments d'un ensemble.
- **Un contexte symbolique** où les mots-nombres servent à décoder une écriture chiffrée sans autre contexte (« ceci (écriture 2) est deux »).
- **Un contexte non numérique** où les mots-nombres servent à désigner des codes tels que numéros de téléphone, d'autobus, etc...

2. L'enseignement des désignations des nombres

2.1 Comment donner du sens aux écritures chiffrées ?

Dans un exercice du type « *dans 387, le chiffre des dizaines est...* », l'élève doit avoir retenu l'ordre des noms des chiffres : il peut répondre correctement sans avoir compris la construction des nombres, par simple mémorisation.

Mais il n'en est plus de même dans un exercice du type : « *dans 387, le nombre de dizaines est...* ».

- Il doit analyser ce nombre à partir d'idées de groupement et d'échange.
- Il doit voir compris et retenu les équivalences :
 - Une dizaine c'est la même chose que **dix** unités.
 - Une centaine c'est la même chose que **dix** dizaines.
 - Une centaine c'est la même chose que **cent** unités.

Du CP au CE2, il faut proposer aux élèves des activités très décontextualisées afin de leur permettre de comprendre ces mécanismes.

Organiser une grande collection en vue d'en écrire le nombre des éléments

Proposer au CP une situation-problème dans laquelle le dénombrement un à un ne suffit pas : dénombrement d'une très grande collection (plus de 1000 éléments). Le nombre d'éléments est la variable didactique fondamentale de la situation. Les amener à utiliser el groupement par 10.

Reconnaître l'organisation en base dix dans l'écriture chiffrée

- Du CP au CE2, proposer aux élèves des situations d'analyse des écritures chiffrées aux contextes variés.
- Amener les enfants à comprendre que, par exemple le « 5 » dans 56 correspond à 5 paquets de 10.

Analyser une collection déjà organisée (matériel de numération)

Quand les élèves ont participé activement à l'organisation d'une collection en paquets de dix, puis cent, mille..., on peut les faire travailler sur des matériels nouveaux dans lesquels les « paquets » sont plus ou moins visibles.

- **Matériels avec échange : points, barres et plaques** : éléments unités (cubes ou carrés...), barres de dix qui évoquent 10 éléments unités, plaques de 100 unités. Exercices dans les 2 sens.
- **La monnaie**.

Résumé des caractéristiques des différents matériels

1. Les « uns » qui demeurent :

Dans la dizaine que l'on constitue comme groupement, chacune des unités reste présente. Pour constituer l dizaine, utilisation d'un élastique ou regroupement dans un sachet.

2. Les « uns » qui s'échangent mais restent visibles

Echange qui fait disparaître le « un » initial dans un tout : la barre (même si la barre peut être graduée par des encoches).

3. Les « uns » qui disparaissent mais laissent une trace symbolique

C'est le principe de l'argent.

C'est un pas vers l'abstraction.

4. Les « uns » qui disparaissent se transforment en un autre « un » en changeant de couleur

Pas supplémentaire vers l'abstraction.

5. Les « uns » qui parlent suivant la position

Abaques et bouliers.

2.2 La suite numérique écrite

- La suite numérique écrite, parfaitement régulière, ne fait que traduire les effets des groupements en base 10.
- Pourtant, les élèves sont capables d'apprendre à écrire cette suite par la simple observation de son fonctionnement bien avant d'avoir compris le rôle des groupements : ne pas confondre la compréhension et la maîtrise de l'algorithme avec le rôle des groupements et des échanges de notre système de numération.

2.3 Numération écrite, numération orale

Codages, décodages

- Puisque **la suite écrite est parfaitement régulière**, c'est sur cette suite que l'on va faire travailler l'observation des régularités. Il faut que les élèves soient capables de lier ces régularités de la suite à l'organisation même de l'écriture à l'intérieur de chaque nombre (rôle des groupements).
- **Irrégularités de la suite orale** :
 - o **Les mots-nombres de onze à seize** : peuvent être mémorisés sans problème comme les précédents.
 - o **De soixante à quatre-vingt dix-neuf** : pose plus de problèmes pour plusieurs raisons :
 - L'enfant qui commence à travailler dans ce domaine numérique vient de percevoir les régularités de la suite numérique, il se trouve dérouté par ce changement.
 - La nature de ces irrégularités : les mots rencontrés ont des compositions variées :
 - soixante-dix : obéit à une composition uniquement additive : $60 + 10$.
 - quatre-vingts : composé de façon multiplicative : 4×20 .
 - quatre-vingt dix : $4 \times 20 + 10$.

Les grands nombres

- Pour un enfant de l'école primaire, un nombre est jugé « grand » lorsqu'il est difficile à lire ou à écrire, difficile à concevoir et d'usage inhabituel.
- Sur le plan didactique, on parle de « grands nombres » pour évoquer les nombres au-delà de 10000 ou de 100000.

2.4 Comparaison des nombres à partir de leurs écritures chiffrées

- Au cycle 1, les problèmes de comparaison concernent surtout les collections elles-mêmes.
- A partir du cycle 2, comparaison de nombres à partir de leurs écritures chiffrées.
- Utiliser dès le CP une droite numérique non graduée respectant l'ordre des nombres de gauche à droite pour y positionner les nombres

Tableau récapitulatif

	Désignations chiffrées	Désignations orales
Utiliser globalement les désignations, sans référence à leur construction	Lecture de certaines écritures chiffrées « utiles » isolées ou organisées (bande numérique)	Utilisation des mots-nombres mémorisés.
Comprendre les significations : <ul style="list-style-type: none"> - aspect groupement - aspect échange 	<ul style="list-style-type: none"> - Valeur des chiffres en fonction de leur position. - Equivalences : $1 \text{ dz} = 10 \text{ u}$ $1 \text{ ct} = 10 \text{ dz}$ $1 \text{ ct} = 100 \text{ u}$ - Lien avec groupements et échanges. - Lien avec décompositions : $235 = (2 \times 100) + (3 \times 10) + 5$ - Valeur des chiffres et comparaison des nombres. 	<ul style="list-style-type: none"> - Sens des mots : vingt, cent, mille... - Rôle de la position des mots : « deux cents » et « cent deux ». - Lien avec décomposition : 2×100 et $100 + 2$.
Comprendre l'organisation de la suite numérique <ul style="list-style-type: none"> - aspect algorithmique 	<ul style="list-style-type: none"> - Organisation de la suite des nombres écrits en chiffres (algorithme permettant de la produire). - Rôle différent des chiffres selon leur position. - Obtention du précédent et du suivant. - Liens avec le fonctionnement d'un compteur. - Comment savoir si un nombre est avant ou après un autre ? 	<ul style="list-style-type: none"> - Les régularités de un à neuf, de vingt à soixante. - Les irrégularités : de dix à vingt, de soixante-dix à cent.
Savoir passer de l'écrit à l'oral et réciproquement	Ecrire et lire des nombres	
Savoir comparer et ranger des nombres	<ul style="list-style-type: none"> - Utilisation d'outils tels que : bande numérique, droite numérique. - Utilisation d'un algorithme de comparaison des écritures chiffrées. 	Situer des nombres donnés de façon orale les uns par rapport aux autres.