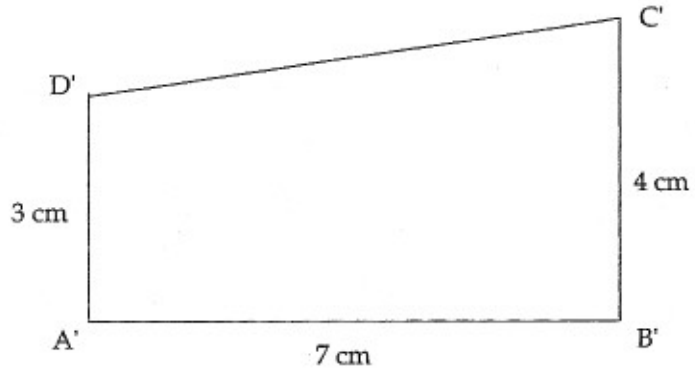
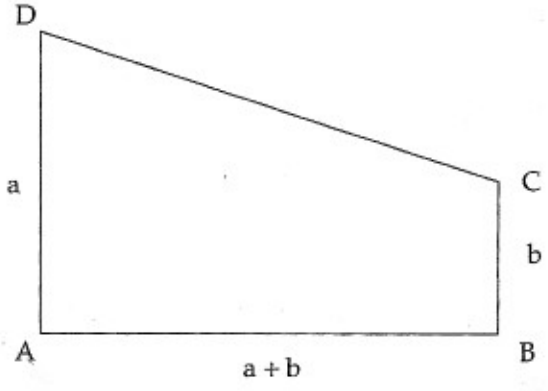
Corrigé du Sujet de CRPE pour les vacances de printemps

Exercice 1

A/



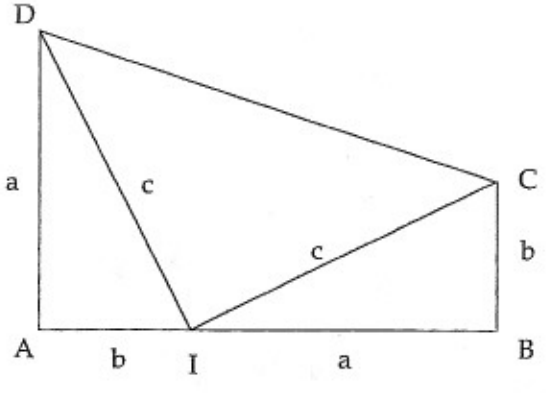
• Le trapèze A'B'C'D' convient. Voici cependant un trapèze ABCD, différent de A'B'C'D', et respectant les contraintes de l'énoncé.



1/ Appliquons la formule de l'aire d'un trapèze.

$$\text{Aire(ABCD)} = \frac{(AD + BC) \times AB}{2} = \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$$

2/



Les triangles DAI et IBC sont superposables donc $A\hat{D}I = B\hat{I}C$. Les angles $A\hat{D}I$ et $A\hat{I}D$ sont complémentaires, donc les angles $B\hat{I}C$ et $A\hat{I}D$ sont complémentaires, soit

$$A\hat{I}D + B\hat{I}C = 90°$$

Or $\quad A\hat{I}D + D\hat{I}C + B\hat{I}C = 180°$

Donc $\quad D\hat{I}C = 180° - (A\hat{I}D + B\hat{I}C) = 180° - 90° = 90°$

L' angle $D\hat{I}C$ est droit.

3/ Les triangles DAI et IBC étant superposables, on a IC = DI = c. En appliquant la formule de l'aire d'un triangle rectangle on obtient :

$$\text{Aire(DAI)} = \frac{ab}{2} \qquad \text{Aire(IBC)} = \frac{ab}{2} \qquad \text{Aire(DIC)} = \frac{c^2}{2}.$$

On en déduit aussitôt

$$\text{Aire(ABCD)} = \text{Aire(DAI)} + \text{Aire(IBC)} + \text{Aire(DIC)},$$

soit $$\text{Aire(ABCD)} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}.$$

4/ Les expressions de l'aire du trapèze ABCD calculées à la question 1 et à la question 3 sont égales, on a donc

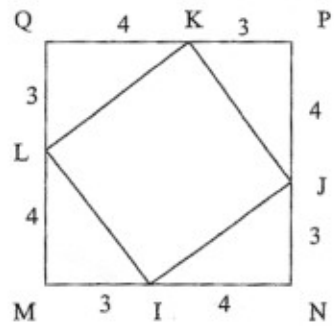
$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2} \qquad (a+b)^2 = 2ab + c^2 \qquad a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2.$$

Et finalement, après simplification :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Comme on peut réaliser la figure de la question 2 avec des mesures a et b quelconques, le théorème de Pythagore est démontré : dans tout triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse (c^2) est égal à la somme des carrés des mesures des côtés de l'angle droit ($a^2 + b^2$).

B/ Voici, à l'échelle 1/2, la représentation de la face MNPQ et du quadrilatère IJKL.



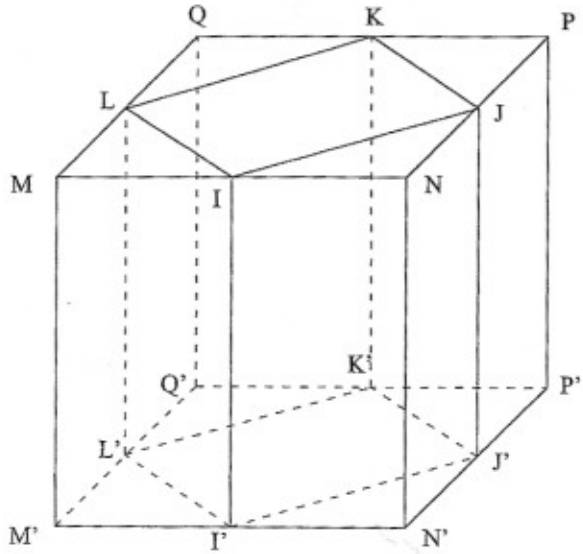
1/ En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles KQL, LMI, INJ et JPK on obtient :

$$IJ = JK = KL = LI = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}.$$

Le quadrilatère IJKL a quatre côtés de même longueur, c'est donc un losange.

Les triangles rectangles KQL et JPK sont superposables (côtés de l'angle droit deux à deux de même longueur). Il en résulte, par un raisonnement identique à celui de la question A/2/ , que les angles $Q\hat{K}L$ et $P\hat{K}J$ sont complémentaires et qu'en conséquence l'angle $L\hat{K}J$ est droit.
Le quadrilatère IJKL est un losange possédant un angle droit, c'est donc un carré.

2/



Le solide restant est un prisme droit à base carrée. Sa hauteur mesure 7 cm (mesure de l'arête du cube), ses bases (IJKL et I'J'K'L') sont des carrés de 5 cm de côté. Appliquons la formule du volume d'un prisme :

Volume du solide restant = (Aire de la base) × hauteur = $(5\times5)\times7 = 175$ cm^3.

Questions complémentaires

Question 1

a) Différents procédés sont utilisés ici pour présenter les polyèdres.

- des représentations planes

On relève:

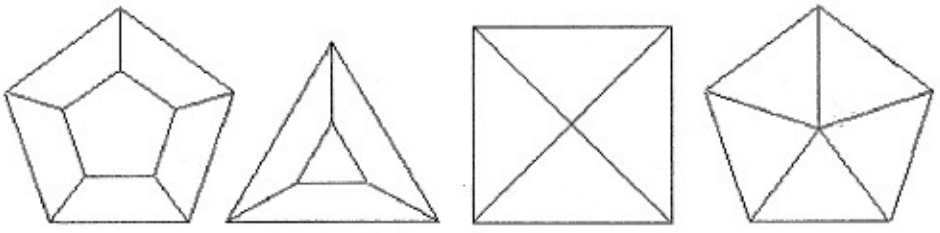
- de type patron (Découverte, Ex. 2)
- de type perspective, faces opaques (Ex. 3.C)

- des programmes de construction avec matériel correspondant constitué de polygones en papier

- de type textuel (Ex. 3.A et 3.B)
- de type schéma de voisinage (Ex. 1, Ex. 3.D, Ex. 4)

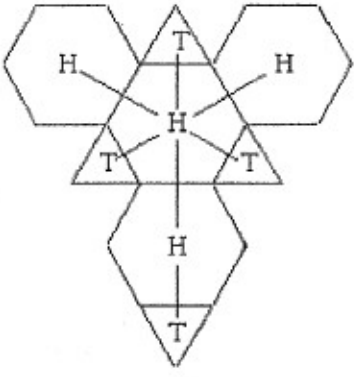
b) Autres procédés utilisables :

- représentation plane de type perspective, faces transparentes.
- graphe topologique, avec matériel, où n'interviennent que les relations d'incidence (nombre d'arêtes bordant chaque face, nombre d'arêtes issues de chaque sommet) sans considération des propriétés métriques. Ce type de représentation privilégie les arêtes.



Ces 4 graphes correspondent aux 4 polyèdres de la partie "Découverte".

c)
Le schéma de voisinage (Ex. 1) est une représentation duale du patron : chaque face est représentée par une lettre indiquant sa nature (Triangle, Carré, Hexagone).
Chaque segment entre deux lettres correspond à la relation entre polygones du patron : "... a un côté commun avec ..."



Question 2
a) Intentions pédagogiques
"Réfléchir sur les relations d'incidence(de voisinage) qui existent entre les faces, les arêtes, les sommets d'un polyèdre. Apprendre aux enfants à construire des polyèdres à partir de divers types de représentations : patrons, schémas, programme."
(cf. Livre du Maître "Le nouvel Objectif Calcul" CM1, page 253.)
b) Liens entre ces intentions et les Instructions Officielles.
Programmes.

Représentation plane d'objets de l'espace ; patron.

Compétences

L'élève doit être capable de reproduire, de décrire et de construire quelques solides usuels.

Les intentions pédagogiques sont en cohérence avec les Instructions Officielles.

Question 3

a)

A : il manque une face carrée à ce patron de prisme droit dont la base est un pentagone régulier convexe..

B : prisme droit à base triangulaire.

C : il manque une face triangle équilatéral à cette pyramide à base carrée.

D : pyramide dont la base est un pentagone régulier convexe.

b)

L'ordre chronologique adopté par l'enseignant, qui suit pas à pas la démarche du livre du maître, n'est pas le même que celui des consignes du manuel. L'enseignant favorise une activité de recherche, fait émettre des hypothèses, donne des outils pour les vérifier. Cela correspond aux consignes 1, 3 et 4.

C'est en tirant partie de ce travail d'analyse que certains patrons pourront être complétés, ce qui correspond à la consigne 2.

La démarche de l'enseignant risque d'être perturbée par des élèves qui, sans réflexion préalable, voudront compléter, modifier les patrons de manière intuitive, sans passer par l'étape de formulation des hypothèses et de leur vérification.

Exercice 2

1° Peut-on parler de situation de proportionnalité entre garçons et filles pour décrire la situation des lecteurs en grave difficulté ?

Calculons des valeurs approchées des rapports :

$$\frac{27,6}{20,1} \approx 1,37$$

$$\frac{12,9}{8,4} \approx 1,54$$

$$\frac{3,6}{2,8} \approx 1,29$$

$$\frac{1,6}{1,2} \approx 1,33$$

Nous constatons qu'elles sont différentes ; par conséquent, on ne peut pas parler de situation de proportionnalité entre garçons et filles pour décrire la situation des lecteurs en grave difficulté.

2°

a) Récapitulons les résultats demandés et les calculs nécessaires dans les tableaux suivants.

Niveau	1	2	3	4
Nombre de jeunes de ce niveau	6,7%x522148 ≈ 34 984	29,1%x522148 ≈ 151 945	11,7%x522148 ≈ 61 091	52,5%x522148 ≈ 274 128

Les résultats ont été arrondis pour que la somme soit bien égale à 5220148.

Niveau	1	2	3	4
Nombre de jeunes en grave difficulté	25,3%x34 984 ≈ 8 851	11,1%x151 945 ≈ 16 866	3,2%x61 091 ≈ 1955	1,4%x274 128 ≈ 3838

b) Calculons le pourcentage de jeunes en grave difficulté, par rapport à la population totale, pour chaque niveau de scolarité.

Récapitulons à nouveau les résultats demandés et les calculs nécessaires dans le tableau suivant.

Niveau	1	2	3	4
Pourcentage de jeunes en grave difficulté	6,7% x 25,3% ≈ 1,7%	29,1% x 11,1% ≈ 3,2%	11,7% x 3,2% ≈ 0,4%	52,5% x 1,4% ≈ 0,7%

Chaque pourcentage peut être aussi obtenu en calculant le rapport entre le nombre de jeunes en grave difficulté d'un niveau et 522 148.

3° Donnons deux relations qui lient x et y.

D'une part, $x + y = 34\,984$.
D'autre part, $27{,}6\,x + 20{,}1\,y = 25{,}3 \times 34984$.
Calculons x et y.

$y = 34\,984 - x$ et $27{,}6\,x - 20{,}1\,x = 25{,}3 \times 34984 - 20{,}1 \times 34984$
Soit : $7{,}5\,x = 5{,}2 \times 34\,984 = 181\,916{,}8$

On obtient donc : $x = \dfrac{181\,916{,}8}{7{,}5} \approx 24\,256$ et $y = 10\,728$.

Questions complémentaires : Exercice 2

Question 1

La notion mathématique de référence est la proportionnalité. On peut aussi ajouter les fractions.

Question 2
Plusieurs raisonnements permettent de résoudre le problème. Nous en donnons quatre mais un seul est exigé.

1-Raisonnements utilisant la proportionnalité

Les données correspondantes peuvent être consignées dans deux tableaux de proportionnalité :

Produit A

chocolat	lait
3	2

Produit B

chocolat	lait
2	1

Il s'agit de se ramener au même nombre de parts de lait ou de chocolat pour pouvoir comparer.

Solution 1 : on se ramène à 1 part de lait

Produit A

chocolat	lait
3	2
1,5	1

Pour 1 part de lait, il y a 1,5 part de chocolat dans le produit A et 2 parts de chocolat dans le produit B.

Solution 2 : on se ramène à 2 parts de lait

Produit B

chocolat	lait
2	1
4	2

Pour 2 parts de lait, il y a 3 parts de chocolat dans le produit A et 4 parts de chocolat dans le produit B.

Solution 3 : on se ramène à 1 part de chocolat

Produit A

chocolat	lait
3	2
1	$\frac{2}{3}$

Produit B

chocolat	lait
2	1
1	0,5

Pour 1 part de chocolat il y a $\frac{2}{3}$ part de lait dans le produit A et 0,5 part de lait dans le produit B . Or $\frac{2}{3} > 0{,}5$.

Avec l'un ou l'autre des calculs de proportionnalité la conclusion est :
B a plus de chocolat que A.

2- Raisonnement en comparant des fractions
Remarque : une comparaison de fractions n'ayant pas le même dénominateur est hors de portée d'un élève de cycle trois.

Dans A, il y a $\frac{3}{5}$ de chocolat et $\frac{2}{5}$ de lait

Dans B, il y a $\frac{2}{3}$ de chocolat et $\frac{1}{3}$ de lait

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ et $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ $\frac{9}{15} < \frac{10}{15}$

Donc **B a plus de chocolat que A**.

Question 3

Linda ne compte que les parts de chocolat sans se ramener à la même quantité de liquide, d'où son erreur.

Nathalie se ramène à 2 parts de lait dans les deux boissons et trouve 3 < 4.

Celia :
Hypothèse 1 : elle cherche à comparer pour 2 parts de lait, mais utilise une propriété erronée pour passer de la 1ère ligne à la seconde : additionner 1 au lieu de multiplier par 2.

Produit A

chocolat	lait
3	2

Produit B

chocolat	lait
2	1
2+1	1 + 1

Hypothèse 2 : elle pense implicitement au rapport de la quantité de chocolat à la quantité de lait . Ce rapport est 2 pour le produit B. Elle trouve que c'est le même rapport pour le produit A car on passe de B à A en rajoutant une part de chaque produit ; ceci revient à croire que : $\frac{2}{1} = \frac{2+1}{1+1}$

Loïc :
Il regarde seulement les parts de lait qui sont 2 pour A et 1 pour B. Comme 2>1 il en déduit qu'il y a plus de lait dans A. La réponse est exacte, mais il semble que son raisonnement soit faux.

Antoine :
Il se ramène à une part de lait pour les deux produits. La solution est exacte.

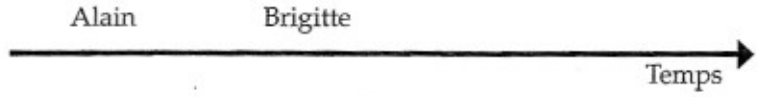
Question 4
Antoine aurait dû ajouter : « Dans la recette A, pour une part de lait … »
La rédaction plus achevée du raisonnement d'Antoine a été donnée à la première question (solution 1).

Exercice 3 A

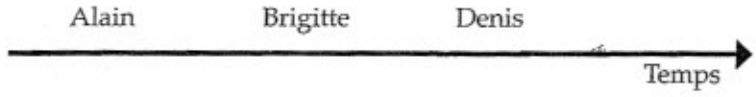
Cherchons l'enfant qui se lève le plus tôt.

Pour cela représentons les informations données textuellement sur l'axe du temps.

Phrase n° 1 : « Alain est toujours levé avant Brigitte. » est représentée par

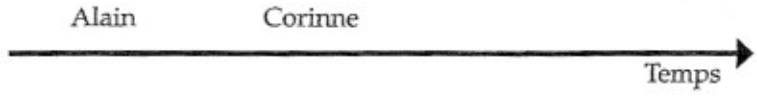


Phrase n° 2 : « Brigitte est parfois levée avant Corinne et toujours avant Denis. »



Nous ne pouvons pas situer Corinne avec certitude.

Phrase n° 3 : « Corinne ne se lève jamais avant Alain... »



Phrase n° 4 : « Eric ne se lève jamais avant Alain... »

Nous voyons qu'Alain est toujours situé le plus à gauche sur l'axe du temps.
C'est donc Alain qui se lève le plus tôt.

Exercice 3 B

Calculons les nombres de points d'un refus et de la chute d'une barre.

Désignons par x le nombre de points d'un refus et par y le nombre de points d'une chute de barre.
Pierre totalise 2 refus et 3 chutes de barres pour 18 points de pénalité.
Jean totalise 1 refus et 4 chutes de barres pour 19 points de pénalité.

Nous avons donc à rechercher x et y telles que :

$$\begin{cases} 2x+3y=18 \\ x+4y=19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=18 \\ x=19-4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(19-4y)+3y=18 \\ x=19-4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4 \\ x=19-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases}$$

Un refus de sauter coûte 3 points et une chute de barre vaut 4 points de pénalité.