

### Exercice 1

1. (a) 34 n'étant pas un multiple de 3, Pierre ne peut, seul, donner exactement 34 points à Jean. Cependant,

Pierre peut donner plus de points que 34 en jetons de 3 points de manière à ce que Jean rende la différence en jetons de 7 points.

Soit B le nombre de jetons bleus donnés par Pierre (de trois points) et R le nombre de jetons rouges rendus par Jean (de sept points).

On cherche donc une valeur de B et une valeur de R telle que  $3 \times B = 34 + 7 \times R$ .

Recherche par tâtonnement d'une solution (on dit une car il en existe plusieurs) :

X Si  $R = 0$ ,  $3 \times B = 34$  et donc B ne serait pas entier. Le cas  $R = 0$  ne fournit donc pas de solution.

X Si  $R = 1$ ,  $3 \times B = 34 + 7 = 41$  et donc B ne serait pas entier. Le cas  $R = 1$  ne fournit donc pas de solution.

X Si  $R = 2$ ,  $3 \times B = 34 + 7 \times 2 = 48$  et  $B = 16$ . Ainsi,  $B = 16$  et  $R = 2$  fournit une solution.

On s'arrête là car on a trouvé une solution.

(b) Soit B le nombre de jetons bleus de Paul et R le nombre de jetons rouges de Paul.

D'après ce qu'affirme Paul,  $B \times 3 + R \times 7 = 94$  et  $B + R = 29$ .

En résolvant le système linéaire, on s'aperçoit que les nombres B et R ne sont pas entiers (résoudre ce système lors du concours).

(c) Soit b le nombre de jetons bleus de Céline et r le nombre de jetons rouges de Céline.

On a  $b \times 3 + r \times 7 = 34$ .

Recherche par tâtonnement des solutions :

X Si  $r = 0$ ,  $3 \times b = 34$  et b ne serait pas entier. Le cas  $r = 0$  ne fournit donc pas de solution.

X Si  $r = 1$ ,  $3 \times b = 27$  et  $b = 9$ . Ainsi,  $b = 9$  et  $r = 1$  fournit une solution.

X Si  $r = 2$ ,  $3 \times b = 20$  et b ne serait pas entier. Le cas  $r = 2$  ne fournit donc pas de solution.

X Si  $r = 3$ ,  $3 \times b = 13$  et b ne serait pas entier. Le cas  $r = 3$  ne fournit donc pas de solution.

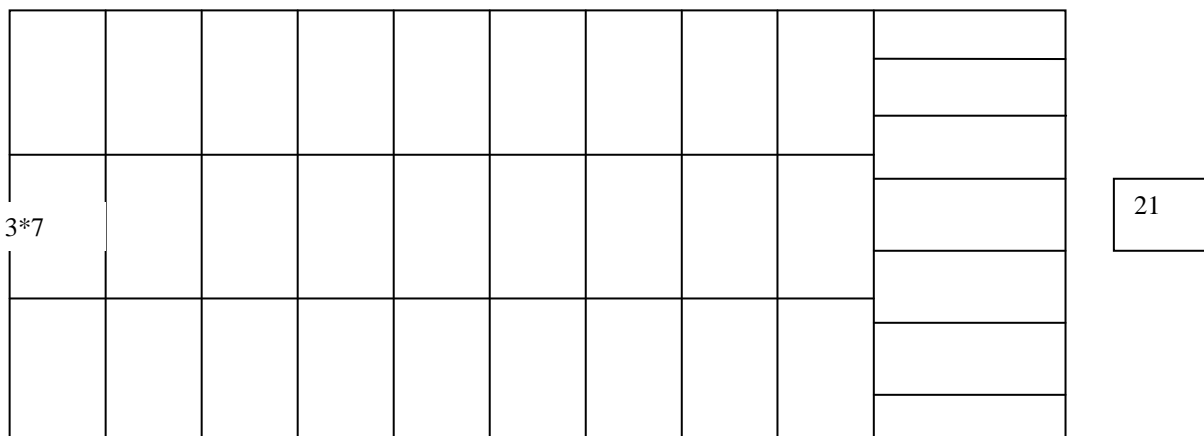
X Si  $r = 4$ ,  $3 \times b = 6$  et  $b = 2$ . Ainsi,  $b = 2$  et  $r = 4$  fournit une solution.

X Si  $r = 5$ ,  $3 \times b = -1$  et b ne serait pas entier. Le cas  $r = 5$  ne fournit donc pas de solution.

X Si  $r > 5$ , b sera négatif, ce qui ne fournit pas de solution.

2. Le schéma suivant réinvestit la décomposition  $34 = 9 \times 3 + 7$  pour paver un rectangle de longueur 34 et de largeur 21. Chaque rectangle ci-dessous mesure  $3 \times 7$  (même si le dessin le rend mal ☺).

$$34 = 9 \times 3 + 7$$



Il s'agit d'un pavage (il n'y a pas de trou) et on peut donc disposer un maximum de 34 rectangles de longueur 7 et de largeur 3 dans le rectangle de longueur 34 et de largeur 21.

### Question complémentaire

a) Cet exercice permet d'évaluer les connaissances des élèves relatives aux carrés et aux losanges et leur aptitude à :

*Reconnaître de manière perceptive une figure plane, en donner le nom*

*Identifier, de manière perceptive, une figure simple dans une configuration plus complexe*

*Vérifier l'existence d'une figure simple dans une configuration complexe, en ayant recours aux propriétés et aux instruments.*

Toutefois, la validation à l'aide des instruments et l'explicitation des propriétés n'est pas demandée ici.

b) Pour reconnaître un losange, l'élève doit vérifier l'égalité des longueurs des quatre côtés ; pour cela, il peut le faire perceptivement ou utiliser la règle graduée, le compas ou le report de longueur sur le bord d'une feuille. Il peut aussi se servir des rayons du cercle qui se trouve sur le schéma.

Pour reconnaître un carré, l'élève doit vérifier l'égalité des longueurs des quatre côtés et un angle droit ou bien l'égalité des longueurs de deux côtés consécutifs et trois angles droits ; pour vérifier les angles droits, l'élève peut utiliser l'équerre ou une feuille pliée bord sur bord.

c) **L'élève A**, pour ses réponses, ne colorie pas les côtés mais seulement l'intérieur des quadrilatères de la figure.

Pour le losange, il colorie deux losanges qui n'ont pas d'angle droit, mais celui du bas n'en est pas un : il aurait pu voir que deux cotés n'ont pas la même longueur grâce au cercle ; il ne prend pas en compte le carré comme losange particulier.

Cependant, dans l'exercice, on demandait seulement de colorier les côtés d'un losange.

Pour le carré, il colorie ensuite deux quadrilatères comme étant des carrés, l'un étant bien le carré *sur la pointe* mais l'autre étant un rectangle ayant deux cotés consécutifs non égaux. On peut donc penser qu'il perçoit bien les angles droits, en particulier même lorsque les côtés ne sont pas l'un horizontal et l'autre vertical. Par contre, malgré la présence du cercle qui met bien en évidence l'inégalité des longueurs, il ne prend pas en compte la nécessité d'avoir des côtés de même longueur pour avoir un carré.

**L'élève B** perçoit bien le carré sur la pointe comme un losange. Il répond donc correctement au 1<sup>er</sup> exercice. Cependant, comme dans le 2<sup>e</sup> exercice, il colorie les côtés de deux quadrilatères qu'il perçoit comme étant des carrés, on peut se demander s'il n'a pas des difficultés à reconnaître comme des losanges ceux qui ne sont pas *sur la pointe*, position souvent privilégiée pour ce type de quadrilatère.

Il colorie bien les côtés du carré *sur la pointe* mais aussi les côtés du rectangle et on peut faire à son sujet les mêmes remarques que pour l'élève A.

**L'élève C** colorie bien les côtés des trois quadrilatères qui sont des losanges en incluant celui qui est aussi un carré. Mais comme pour l'élève A, il se trompe dans le « losange » du bas, qui n'en est pas un à cause de longueurs inégales. Par contre, pour le carré, il colorie bien les côtés du carré *sur la pointe* mais aussi les côtés du rectangle. Il semble donc privilégier comme caractéristique du carré l'existence de quatre angles droits en oubliant de vérifier l'égalité des longueurs des côtés.

**L'élève D** identifie bien un des losanges sans angle droit. Celui dont il colorie les côtés est presque *sur la pointe*.

Par contre, pour le carré, il colorie les côtés du rectangle. A-t-il eu des difficultés à percevoir les angles droits du carré *sur la pointe* et par suite a choisi le quadrilatère ayant des angles droits facilement perceptibles ? En tout cas, il oublie la condition d'égalité des longueurs des côtés pour le carré.

### Exercice 2

1. L'aire du jardin est donnée par :

$$\frac{50+70}{2} \times 30 = 1\,800 \text{ m}^2.$$

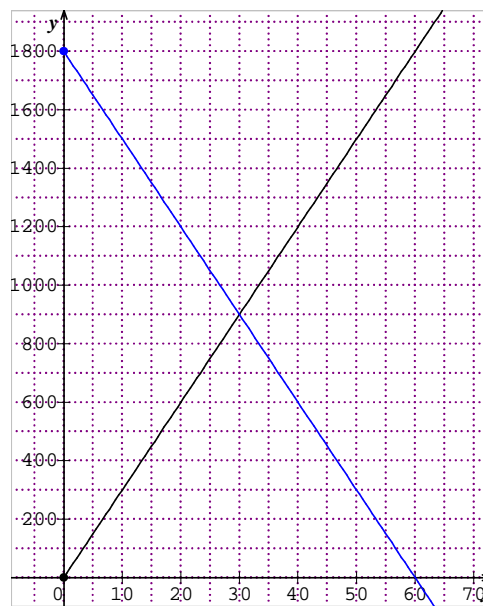
2. Le potager est un rectangle de dimension 30 sur  $x$  ; d'où aire(AMGD) =  $30x$ .

Donc aire(BCGM) =  $1800 - 30x$ .

3. On doit avoir  $30x = 1800 - 30x$  ; d'où  $60x = 1800$  ce qui donne  $x = 30$ . Le potager est donc un carré de côté 30.

4. Ces fonctions sont des fonctions affines (plus particulièrement linéaire pour la première) et leurs représentations graphiques sont des droites. Si  $x$  désigne l'abscisse du point d'intersection de ces deux droites, on a pour ordonnée  $30x$  si on considère le point sur la représentation graphique de l'aire de AMGD et pour ordonnée  $1800 - 30x$  si on considère le point sur la représentation graphique de l'aire de BCGM. On a donc en ce point d'intersection  $30x = 1800 - 30x$ .

On peut lire sur le graphique comme abscisse du point d'intersection 30 et comme ordonnée 900 (c'est l'aire correspondante pour le potager et la pelouse).



### Exercice 3

1. a) Les deux échelles étant régulières, il y a proportionnalité des écarts.

Une augmentation de  $100^{\circ}\text{C}$  correspond à une augmentation de  $212 - 32 = 180^{\circ}\text{F}$ . Une augmentation de  $10^{\circ}\text{C}$  correspond donc à une augmentation de  $18^{\circ}\text{F}$ . On a donc les correspondances suivantes :

$^{\circ}\text{C}$	-50	-40	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$^{\circ}\text{F}$	-58	-40	-22	-4	14	32	50	68	86	104	122	140	158	176	194	212

b) Non, il n'y a pas de proportionnalité entre les deux suites puisque par exemple en  $^{\circ}\text{C}$ , 40 est le double de 20 et en  $^{\circ}\text{F}$  les températures correspondantes 104 et 68 ne sont pas dans la même proportion.

La relation n'est pas du type  $T = a \cdot t$ .

2. On choisit deux couples de valeurs au hasard et on remplace dans l'égalité : on doit avoir par exemple  $212 = a \times 100 + b$  et  $32 = a \times 0 + b$  ; cette dernière égalité donne  $b = 32$  et en reportant dans la 1<sup>e</sup> on trouve bien  $a = 1,8$ .

3.  $T = 1,8 \times 25 + 32 = 77$ . Un écart de  $5^{\circ}\text{C}$  correspond à un écart de  $9^{\circ}\text{F}$  ; on trouve bien  $68 + 9 = 77$ .

4. Il suffit de résoudre  $T = 1,8 T + 32$  ;  $T = -\frac{32}{0,8} = -40$ . Donc  $-40^\circ\text{F} = -40^\circ\text{C}$ .

### **Question complémentaire**

1. La notion sous-jacente est la proportionnalité (reconnaître et traiter une situation) et plus précisément les relations additives et/ou multiplicatives de linéarité.

2. On peut envisager au moins deux procédures de résolution de ces énoncés :

(a) Le passage par le prix unitaire, soit 25€ par objet dans l'énoncé 1 et 2,2€ par objet dans l'énoncé 2, pour déduire que le prix de 9 objets soit  $9 \times 25 = 225$ € dans l'énoncé 1 et de 15 objets soit  $15 \times 2,2 = 33$ € dans l'énoncé 2.

(b) L'utilisation des propriétés de linéarité (qu'elles soient additives ou multiplicatives) : par exemple, dans l'énoncé 1, si 6 objets coûtent 150€, 9 (9 qui est 6 ajouté à la moitié de 6) objets coûtent  $150 + 150/2 = 225$ €; dans l'énoncé 2, si 10 objets coûtent 22€, 15 (15 qui est 10 ajouté à la moitié de 10) objets coûtent  $22 + 22/2 = 33$ €.

Ainsi, le deuxième énoncé a pour effet de rendre la première procédure moins efficace (l'utilisation des décimaux rend les calculs plus complexes). C'est aussi ce pourquoi l'objectif est l'utilisation des propriétés additives et/ou multiplicatives de linéarité et non pas le passage par le prix unitaire.

Il s'agit ici d'évaluer les élèves à l'entrée en sixième. La raison (qui n'est pas pédagogique puisqu'il s'agit ici d'une évaluation sommative) pour laquelle deux énoncés sont proposés est de savoir si les élèves

– maîtrisent les propriétés de linéarité (additives et/ou multiplicatives)

– ou maîtrisent les calculs avec des nombres décimaux (la division exacte à quotient non entier, la multiplication d'un entier par un décimal)

– ou maîtrisent la conversion des euros en centimes d'euros qui permet d'éviter les calculs avec des nombres décimaux.

3. – Soit  $f$  la fonction linéaire associée à la situation de proportionnalité qui à  $x$  objets de l'énoncé 1 fait correspondre leur coût de  $f(x) = 25x$  (ainsi, l'énoncé 1 se traduit par :  $f(6) = 150$ , déterminer  $f(9)$  sachant que  $f$  est linéaire).

– Soit  $g$  la fonction linéaire associée à la situation de proportionnalité qui à  $x$  objets de l'énoncé 2 fait correspondre leur coût de  $g(x) = 2,2x$  (ainsi, l'énoncé 2 se traduit par :  $g(10) = 22$  déterminer  $g(15)$  sachant que  $g$  est linéaire).

• Alice Même procédure dans chacun des deux énoncés (usage de la propriété multiplicative de linéarité) :  $f(9) = f(3 \times 3) = 3 \times f(3) = 3 \times f(6/2) = 3 \times f(6) / 2 = 3 \times 150/2 = 3 \times 75 = 225$  ;

$g(15) = g(3 \times 5) = 3 \times g(5) = 3 \times g(10/2) = 3 \times g(10) / 2 = 3 \times 22/2 = 3 \times 11 = 33$ .

La procédure est correcte. Les calculs sont corrects (multiplications posées en colonne). Les réponses sont correctes.

• Bruno Même procédure dans chacun des deux énoncés : il considère que le prix donné est celui d'un objet et non de 6 dans l'énoncé 1 ou de 10 dans l'énoncé 2.

La procédure est incorrecte bien que si les données avaient été des prix unitaires, elle aurait été correcte. Les calculs sont corrects. Les réponses ne sont pas exprimées (a-t-il eu un doute ?).

• Charles Même procédure dans chacun des deux énoncés (usage du passage par le prix unitaire) :

Il pose des divisions pour calculer le prix unitaire, puis il sert de ce prix comme coefficient de proportionnalité pour calculer  $f(9) = 9 \times f(1)$  et  $f(15) = 15 \times f(1)$ .

La procédure est correcte. Les calculs sont corrects (divisions exactes posées avec la potence et multiplications posées en colonne). Les réponses sont correctes.

• Dalila

◦ Pour l'énoncé 1, elle calcule  $f(9)$  comme suit (usage des propriétés additives et multiplicatives de linéarité) :  $f(9) = f(6 + 2 + 1) = f(6) + f(2) + f(1) = f(6) + f(6/3) + f(6/6) = f(6) + f(6)/3 + f(6)/6 = 150 + 150/3 + 150/6 = 150 + 50 + 25 = 225$ .

Les calculs de  $f(6)/3$  et  $f(6)/6$  ne sont pas posés : sans doute les a-t-elle effectués de tête.

La procédure est correcte. Les calculs sont corrects (addition et calcul en ligne d'une moitié).

La réponse est correcte.

◦ Pour l'énoncé 2, elle calcule  $g(15)$  comme suit (usage des propriétés additives et multiplicatives de linéarité et du prix unitaire) :  $g(15) = g(10+5) = g(10)+g(5)$  ;  $g(5) = g(1)+g(1)+g(1)+g(1)+g(1)$  ;

$g(1)$  est le prix unitaire : elle le calcule en posant la division  $g(10)/10$ .

$g(5) = g(1) + g(1) + g(1) + g(1) + g(1)$  est calculé par une addition en colonne.

$g(10)+g(5)$  est enfin posé en colonne.

La procédure est correcte. Au niveau des calculs, la division posée en potence est correcte, mais la première addition posée en colonne est incorrecte (elle additionne 10 unités et 10 dixièmes comme s'il s'agissait de 10 unités et 10 unités). La réponse est incorrecte.