CERPE 2006 (corrigé)
Groupe 1

EXERCICE 1

1) $d = e$, $c = d + e$, $b = d + c$ et $a = b + d + e$ donc $\begin{cases} a = \dfrac{5\,c}{2} \text{ ou } 2{,}5\,c \\ b = \dfrac{3\,c}{2} \text{ ou } 1{,}5\,c \\ d = \dfrac{c}{2} \text{ ou } 0{,}5\,c \\ e = \dfrac{c}{2} \text{ ou } 0{,}5\,c \end{cases}$

2) Le rectangle a pour aire $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = \left(\dfrac{5\,c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\,c}{2}\right)^2 + c^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{2}\right)^2 = 10\,c^2$

donc $10\,c^2 = 3610$, c'est à dire $c = 19$.

Le rectangle a, en cm, pour longueur : $a + b = \dfrac{5\,c}{2} + \dfrac{3\,c}{2} = 4\,c = 4 \times 19 = 76$ et pour largeur : $a = \dfrac{5\,c}{2} = \dfrac{5 \times 19}{2} = 47{,}5$.

3) La plaque étant homogène, A et B ont même épaisseur et leurs masses sont donc proportionnelles à leurs aires.

Comme tous les carrés, A et B sont semblables, or $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\frac{5\,c}{2}}{\frac{3\,c}{2}} = \dfrac{5}{3}$, leurs aires, et donc leurs masses, sont donc dans le rapport $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$.

D'où la masse en g de la pièce A : $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 \times 100 = 277{,}77...$

c'est à dire, arrondie au décigramme près : 277,8 g ou 2778 dg.

<u>Remarque</u> : N'importe quel nombre compris entre $277{,}6\overline{7}$ et $277{,}8\overline{7}$ est une valeur approchée au décigramme près de la masse.

4) Comme tous les cubes, C et A sont semblables, or $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c}{\frac{5\,c}{2}} = \dfrac{2}{5}$, leurs volumes sont donc dans le rapport $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$. D'où le volume, en m^3, de C : $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \times 2 = 0{,}128$; c'est à dire 128 dm^3.

EXERCICE 2

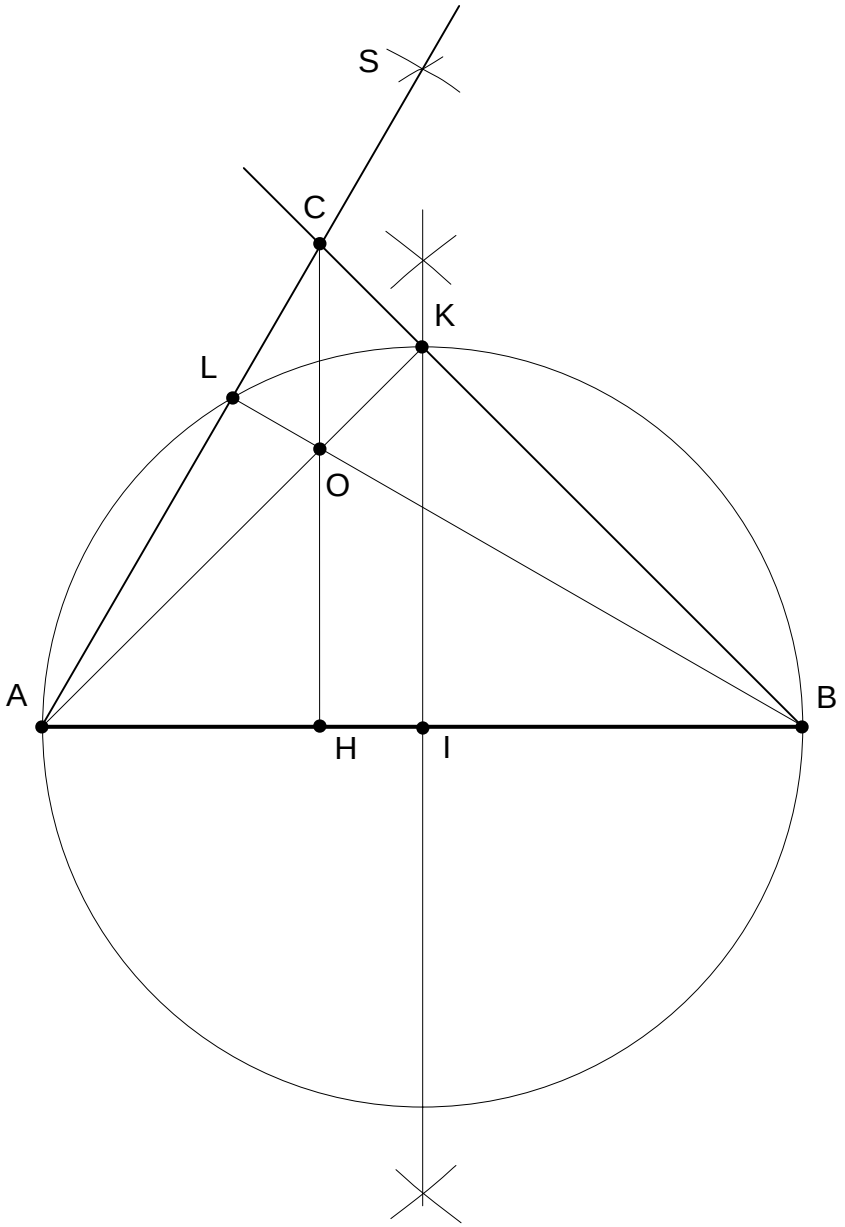
1) $\widehat{ABK} = 45°$ et $\widehat{AKB} = 90°$ car K étant un point du cercle de diamètre AB, le triangle AKB est rectangle en K d'où $\widehat{KAB} = 45°$. Le triangle KAB est donc isocèle (rectangle) de sommet K, en particulier K appartient à la médiatrice de [AB]. I, milieu de [AB] étant un autre point de cette médiatrice : (KI) est la médiatrice du segment [AB].

2) $(AK) \perp (BC)$, puisque le triangle AKB est rectangle en K, pour des raisons similaires $(BK) \perp (AC)$. [AK] et [BK] sont des hauteurs du triangle ABC, leur point d'intersection, O, est l'orthocentre du triangle ABC ; la troisième hauteur, [CH] passe donc par O. En particulier, les points C, O et H sont alignés.

3) (CH) et (KI), perpendiculaires à (AB), sont parallèles : le quadrilatère IKCO est donc un trapèze.

4) Construction du triangle équilatéral ABS en traçant les cercles de centres A et B et de même rayon AB. En particulier, $\widehat{BAS} = 60°$.

Construction de la médiatrice de [AB] qu'elle coupe en son milieu I.
Construction du cercle de centre I passant par A, il coupe la médiatrice de [AB] en K.
Construction de la droite (BK), elle coupe (AS) en C.



EXERCICE 3

1) $26 = 3\times5 + 11$ (ou $5 + 3\times7$),
$43 = 2\times5 + 3\times11$ (ou $3 \times 7 + 2\times11$ ou $5\times5 + 7 + 11$ ou $3\times5 + 4\times7$),
$220\ 012 = 5 + 7 + 20000\times11$ (ou beaucoup d'autres...)

2) a. Il s'agit de trouver tous les nombres entiers a, b, c tels que $34 = 11\,a + 7\,b + 5\,c$.
$34 = 3\times11 + 1$ est la relation définissant la division euclidienne de 34 par 11. Les seules autres relations du type $34 = a \times 11 + k$ sont donc :
- $34 = 3\times11 + 1$. Il n'existe pas d'entiers b et c tels que $7\,b + 5\,c = 1$.
- $34 = 2\times11 + 12$
$12 = 1\times7 + 5$ est la relation définissant la division de 12 par 7. Les seules relations du type $12 = b\times7 + k$ sont donc : $12 = 1\times7 + 5$ et $12 = 0\times7 + 12$. 12 mais 12 n'est pas multiple de 5. On a donc, pour $34 = 2\times11 + 12$ l'unique solution : $34 = 2\times11 + 7 + 5$.
- $34 = 1\times11 + 23$
$23 = 3\times7 + 2$ est la relation définissant la division de 23 par 7. Les seules relations du type $23 = b\times7 + k$ sont donc : $23 = 3\times7 + 2$, $23 = 2\times7 + 9$, $23 = 1\times7 + 16$ et $23 = 0\times7 + 23$ mais ni 2, ni 9, ni 16 ni 23 ne sont multiples de 5.
- $34 = 0\times11 + 34$
$34 = 4\times7 + 6$ est la relation définissant la division de 34 par 7. Les seules relations du

type $34 = b\times7 + k$ sont donc : $34 = 4\times7 + 6$ mais 6 n'est pas multiple de 5, $34 = 3\times7 + 13$, $34 = 2\times7 + 20$ et $20 = 4\times5$, $34 = 1\times7 + 27$ et $34 = 0\times7 + 34$ mais ni 27, ni 34 ne sont multiples de 5. On a donc, pour $34 = 0\times11 + 34$ l'unique solution : $34 = 0\times11 + 2\times7 + 4\times5$.

On a donc, pour atteindre un score égal à 34, exactement deux solutions :

- deux fléchettes dans la zone 11 et une dans chacune des zones 7 et 5.
- deux fléchettes dans la zone 7 et quatre dans la zone 5.

b. On peut procéder comme précédemment.

$40 = 3\times11 + 7$

$7 = 1\times7$ donne la solution $40 = 3\times11 + 1\times7 + 0\times5$

$7 = 0\times7 + 7$

$40 = 2\times11 + 18$

$18 = 2\times7 + 4$ $\quad$ $18 = 1\times7 + 11$ $\quad$ $18 = 0\times7 + 18$

$40 = 1 \times 11 + 29$

$29 = 4\times7 + 1$ $\quad$ $29 = 3\times7 + 8$

$29 = 2\times7 + 15$ donne la solution $40 = 1\times11 + 2 \times 7 + 3\times5$

$29 = 1\times7 + 22$ $\quad$ $29 = 0\times7 + 29$

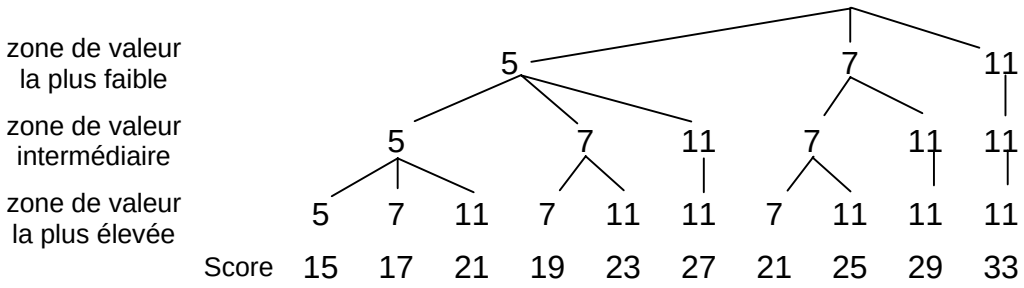
$40 = 0\times11 + 40$

$40 = 5\times7 + 5$ donne la solution $40 = 0\times11 + 5\times7 + 1\times5$

$40 = 4\times7 + 12$ $\quad$ $40 = 3\times7 + 19$ $\quad$ $40 = 2\times7 + 26$ $\quad$ $40 = 1\times7 + 33$

$40 = 0\times7 + 40$ donne la solution $40 = 0\times11 + 0\times7 + 8\times5$

3) Ordonnons de manière croissante les valeurs des trois zones atteintes :



Liste des scores possibles : 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 33

4) a. $14 = 0\times11 + 2\times7 + 0\times5$ $\quad$ $15 = 0\times11 + 0\times7 + 3\times5$ $\quad$ $16 = 1\times11 + 0\times7 + 1\times5$

$17 = 0\times11 + 1\times7 + 2\times5$ $\quad$ $18 = 1\times11 + 1\times7 + 0\times5$

<u>Méthode 1</u>

Soit $N = 11\,a + 7\,b + 5\,c$ un score possible, supérieur à 14.

Si $a > 0$ alors $N + 1 = 11\,(a - 1) + 7\,(b + 1) + 5\,(c + 1)$ est un score possible.

Si $a = 0$ et $b > 1$ alors $N + 1 = 7\,(b - 2) + 5\,(c + 3)$ est un score possible.

Si $a = 0$ et $b \leq 1$ alors $c \geq 2$ (car si $b = 1$, on a $7 + 5\,c \geq 14$ alors $5\,c \geq 7$ donc $5\,c \geq 10$ et si $b = 0$ alors $5\,c \geq 14 \geq 10$) et $N + 1 = 1 \times 11 + 7\,b + 5\,(c - 2)$ est un score possible.

14 est un score possible et pour tout entier $N \geq 14$, si N est un score possible alors $N + 1$ est un score possible : tous les nombres à partir de 14 sont donc des scores possibles.

<u>Méthode 2</u>

14 étant un score possible, $19 = 14 + 5$ l'est aussi. Soit $N \geq 15$, notons q le quotient et r le reste de la division de N par 5 alors $N = 5\,q + r$ avec $0 \leq r < 5$ et $q \geq 3$ (car $N \geq 15$).

$N = 5\,(q - 3) + 15 + r$, or $15 \leq 15 + r < 20$ i.e. $15 + r \in \{15, 16, 17, 18, 19\}$ donc N est un score possible.

b. 1, 2, 3, 4 ne sont pas des scores possibles car ils sont inférieurs à la plus petite valeur cible possible. 6 est inférieur à 7 et n'est pas multiple de 5. 8 et 9, inférieurs à 11, ne sont pas décomposables comme somme d'un multiple de 5 et d'un multiple de 7.

$13 = 1\times11 + 2$ mais $2 < 5$ et $13 = 0\times11 + 13$ mais $13 = 1\times7 + 6 = 0\times7 + 13$ et ni 7, ni 13 ne sont multiples de 5.

D'où la liste des scores impossibles : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 13.

Question complémentaire

1) $34 = 2\times11 + 7 + 5$ et $34 = 0\times11 + 2\times7 + 4 \times 5$ sont les seules décompositions de 34 sous la forme d'une somme d'un multiple de 11, d'un multiple de 7 et d'un multiple de 5. Guillaume et Jeanne ont atteint (à l'ordre près) : deux fois la zone 11, une fois la zone 7 et une fois la zone 5 ou bien deux fois la zone 7 et quatre fois la zone 5.

   Camille a un score égal à 25 or il existe deux décompositions pour 25 : $1\times11 + 2\times7$ et 5×5. Camille a atteint sa cible trois fois (une fois la zone 11 et deux fois la zone 5) ou cinq fois la zone 5.

   Le nombre de fléchettes lancées par Guillaume, Jeanne ou Camille n'est pas indiqué. Un score tel que $2\times11 + 7 + 5$ signifie pour Guillaume qu'il a lancé 4 fléchettes et pour Jeanne qu'elle en a lancé 6. Un score tel que $0\times11 + 2\times7 + 4\times5$ signifie pour Guillaume qu'il a lancé 6 fléchettes et pour Jeanne qu'elle en a lancé 8. La donnée du score permet de déterminer à la fois les zones atteintes et le nombre de fléchettes les ayant atteintes.

   Remarque : Si on considère que, donnée implicite que le contexte de jeu équitable peut laisser supposer, les trois joueurs ont lancé le même nombre de fléchettes alors ils ont lancé chacun 6 fléchettes : Guillaume a atteint deux fois la zone 7 et quatre fois la zone 5 ; Jeanne a atteint deux fois la zone 11 et une fois chacune des zones 5 et 7, deux de ses lancers n'ont pas atteint la cible ; si Camille a atteint trois fois la cible alors elle l'a ratée trois fois sinon avec cinq lancers réussis elle l'a ratée une fois.

2)
   a. Les valeurs des zones facilitent les calculs de type additif ou multiplicatif. Il s'agit, en outre d'un problème ouvert et la résolution d'équations diophantiennes n'est certainement pas un objectif de cette activité qui propose donc un problème centré sur le développement des capacités à chercher car les élèves ne disposent pas de procédure experte.
   b. Techniquement, en ce qui concerne les calculs, le problème est assumable par un élève en fin de cycle 2 puisque seule l'addition est nécessaire, voire l'addition réitérée, et le champ numérique n'est pas trop grand. La difficulté réside plus dans la démarche d'essais-erreurs, on proposera donc cette activité à des élèves de cycle 3.

3) A l'exception du groupe 1, la réponse à la question posée : « Dans quelles zones de la cible Guillaume et Jeanne ont-ils mis leurs fléchettes ? », n'est pas explicitement donnée. Tous essaient d'atteindre 34 par combinaison linéaire (addition et multiplication / addition réitérée) de 11, 7 et 5 mais semblent éprouver des difficultés à interpréter leurs calculs pour donner une réponse. Aucun ne perçoit l'existence de deux combinaisons possibles pour chacun des enfants ni n'utilise explicitement la donnée d'un même nombre de lancers par chaque joueur.

   Le groupe 1 donne les zones atteintes par Guillaume (*il... !*) mais interprète la combinaison $4\times5 + 7 + 7$ comme le lancer de 3 fléchettes (au lieu de 6 et même 8 s'il s'agit de Jeanne). Les calculs sont posés et ne sont pas présentés en ligne.

   Le groupe 2 donne une combinaison correcte non interprétée pour Guillaume mais incorrecte (erreur de calcul) pour Jeanne. Les calculs sont posés et présentés en ligne.

   Les groupes 3 et 4 donnent les deux combinaisons en ligne sans interprétation, associées l'une à Guillaume et l'autre à Jeanne. On notera que le groupe 4 est le seul à donner les combinaisons correctes si on considère que chacun a lancé le même nombre de fléchettes.

   Le groupe 5 ne donne que l'une des combinaisons, associée à la fois à Guillaume et à Jeanne mais sans interprétation.

4) L'annexe 4 propose une activité liée à la numération (type : problème destiné à permettre le réinvestissement de connaissances déjà travaillées, à les exercer). Plus particulièrement aux notions de : chiffre des... / nombre de... (unités, dizaines, centaines...) et numération écrite / numération orale, dans un contexte de « grands nombres ». Par ailleurs, contrairement à l'activité de l'annexe 3, le nombre de fléchettes lancées est donné d'emblée.

   Par exemple, Tom a marqué $30\,000\,200 = 3\times10\,000\,000 + 2\times100$ (trente millions deux cents), il a atteint trois fois la zone 10 000 000 et deux fois la zone 100.