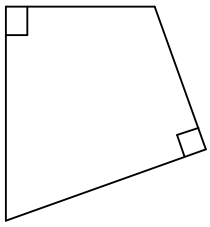
Corrigé DM2

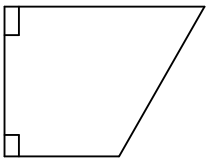
Exercice 1 :

1) Nombre de tirages possible = 10×9 (10 possibilités pour la première étiquette, puis 9 pour la deuxième étiquettes).
Cependant, ces tirages donnent chaque couple deux fois si on ne tient pas compte de l'ordre dans ces couples. (Etiquette1 puis E2, ou E2 puis E1). Or, dans cette situation, l'ordre des propriétés géométrique ne compte pas. Et on obtient donc 45 tirages différents.

On peut aussi raisonner ainsi : après avoir rangé les étiquettes, on choisit la 1ère que l'on peut combiner avec les 9 autres, puis on choisit la 2e que l'on peut associer aux 8 autres restantes, et ainsi de suite. On aboutit ainsi à 9 + 8 + … + 1 choix possibles, et on conclut avec la formule 9+8+…+1=9*10/2=45.

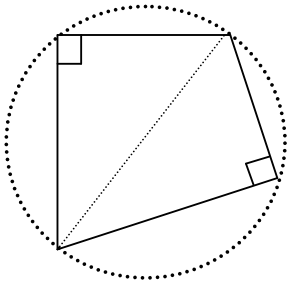
2) Les deux configurations correspondent au cas où les angles droits sont opposés et à celui où les angles droits sont consécutifs.



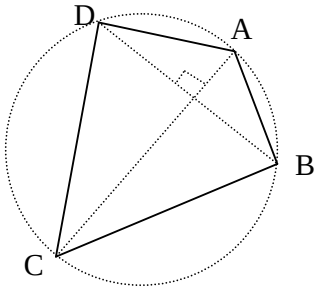


Cas où les deux angles droits sont opposés :

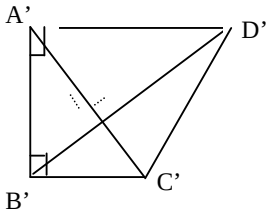
Le quadrilatèle est formé de deux triangles rectangles, ayant une hypothénuse commune. Ces deux triangles sont donc tous deux inscrits dans le même cercle.



Construction : Tracer un cercle de diamètre [AC]. Placer deux points B et D sur ce cercle de part et d'autre du diamètre [AC], tels que (BD) et (AC) soient perpendiculaires. Le quadrilatère ABCD a deux angles droits opposé.



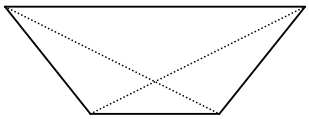
Cas où les deux angles droits sont consécutifs:
Tracer un segment [A'B'].
Tracer la perpendiculaire à [A'B'] passant par A', placer un point D' sur cette droite tel que A'D'≠A'B' (*sinon le quadrilatère sera un carré*).
Tracer la perpendiculaire à [A'B'] passant par B', soit (d) cette droite.
Tracer [B'D']. Tracer la perpendiculaire à [B'D'] passant par A', elle coupe (d) en un point C'.
Tracer A'B'C'D'.



3) L'étiquette « Deux cotés parallèles seulement » est incompatible avec :
« Quatre angles droits », car le quadrilatère est alors un rectangle qui a ses cotés parallèles deux à deux.

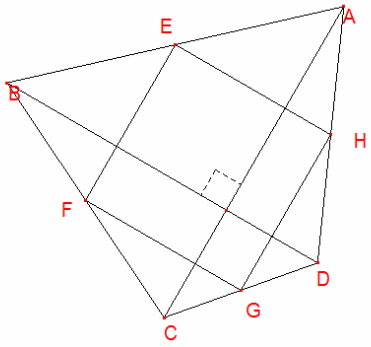
« Cotés égaux deux à deux » car ce quadrilatère est parallélogramme si ce sont les cotés opposés qui sont égaux ; c'est un losange si on impose que les cotés consécutifs sont égaux et que deux cotés opposés soient parallèles.
« Quatre cotés égaux » : car le quadrilatère est un losange et a ses cotés parallèles deux à deux
« Cotés opposés parallèles » : incompatibilité évidente
« Diagonales se rencontrant en leur milieu » : le quadrilatère est un parallélogramme.

L'étiquette « Deux cotés parallèles seulement » est compatible avec :
« Deux angles droits seulement » : voir la figure A'B'C'D' de la question 2).
« Deux cotés égaux seulement » : un trapèze ABCD isocèle par exemple ((A'B) parallèle à (CD) et AD=BC)
« Diagonales égales » : le trapèze ci-dessous



« Diagonales perpendiculaires » : voir la figure A'B'C'D' de la question 2)

4) Montrons que EFGH est un carré :

Théorème des milieux appliqué au triangle ABC, E étant le milieu de [AB] et F le milieu de [BC] : (AC) parallèle à (EF) et EF=1/2AC. Théorème des milieux appliqué au triangle BCD, F étant le milieu de [BC] et G le milieu de [CD] : (BD) parallèle à (FG) et FG=1/2BD Théorème des milieux appliqué au triangle CDA, G étant le milieu de [CD] et H le milieu de [AD] : (AC) parallèle à (GH) et GH=1/2AC Théorème des milieux appliqué au triangle ABD, E étant le milieu de [AB] et H le milieu de [AD] : (BD) parallèle à (EH) et EH=1/2BD Comme (AC) et (BD) sont perpendiculaire, on a (EF) et (FG) qui sont perpendiculaires aussi Comme AC=BD, on a EF=FG=GH=EH=1/2AC=1/2BD. EFGH est un quadrilatère qui a 1 angle doit et 4 cotés de même longueur : c'est un carré.	

Questions complémentaires :
a. L'activité peut être proposée au cycle 3 : les notions de diagonale, de perpendicularité, de cotés opposés sont abordées dans ce cycle. Par ailleurs, la construction d'une figure satisfaisant deux contraintes peut être très difficile dans certains cas (par exemple : « deux angles droits seulement » et « diagonales perpendiculaires » dans la question 3). On peut donc préciser que cette activité relève du CM2.
b. On peut donner les objectifs suivants :
- revoir le vocabulaire
- travailler la construction de figures géométriques
- organiser la recherche d'un quadrilatère satisfaisant deux contraintes. Cette recherche peut s'avérer difficile dans certains cas et c'est l'occasion de travailler les tracés à main levée.

c. **Elève A** :
Procédure :
- trace un segment (appelons le [AB])
- trace deux segments de même longueur, perpendiculaires à [AB], d'origine A et B.
- l'élève ne parvient pas à finir, car le quadrilatère est un rectangle, il identifie que sa figure ne permet pas de satisfaire la condition « deux angles droits seulement » (et la deuxième également).

Erreur :
La procédure ne permet pas de trouver un quadrilatère satisfaisant parce que l'élève s'en tient à des cotés égaux qui sont deux cotés opposés, ce qui conduit à tracer un rectangle. Il faudrait que l'élève ajuste sa procédure en reportant la longueur AB sur un des cotés perpendiculaire à [AB] mais il semble ne pas pouvoir l'envisager d'autant que perceptivement, l'égalité des longueurs se reconnaît plus facilement quand les segments ont même direction. Les quadrilatères particuliers ont le plus souvent des côtés opposés de même longueur. Le cerf-volant qui a les côtés consécutifs deux à deux de même longueur a été seulement introduit dans le dernier programme en vigueur.

Il y a aussi une difficulté d'envisager des angles droits opposés qui se reconnaissent plus difficilement que lorsqu'ils sont construits aux extrémités d'un même segment.
Notons que c'est le seul élève qui affirme que sa procédure ne donne pas un résultat correct.

Elève B :
Procédure :
- trace deux segments perpendiculaires et de même longueur.
- Trace le quadrilatère dont ces deux segments sont les diagonales

Erreur :
L'élève fait une confusion entre cotés et diagonales du quadrilatère. Par ailleurs, les angles formés par les diagonales du quadrilatère sont considérées comme des angles du quadrilatère.
On peut se demander si l'élève n'a pas dans un premier temps rencontré les mêmes difficultés que l'élève A et C. Il semble avoir cherché à appliquer aux mêmes côtés, les deux contraintes proposées : l'égalité des longueurs et les angles droits.
Elève C :
Procédure :
- tracer un segment (appelons le [AB])
- tracer deux segments [AD] et [BC] de même longueur, perpendiculaires à [AB].
- Fermer le polygone avec deux segment (de même longueur ici, mais cela semble de seconde importance)

Erreur :
La réalisation de cet élève est à rapprocher de celle de l'élève A et les mêmes remarques s'appliquent. L'élève complète sa figure de manière à ne pas obtenir un rectangle (ce qui ne permettrait pas de satisfaire la condition « seulement deux angles droits), en construisant donc un polygone qui satisfait cette contrainte mais qui n'est pas un quadrilatère. L'élève peut avoir oublié ou ne pas connaître le vocabulaire « quadrilatère », ou il peut avoir cherché à donner une réponse malgré tout.

Exercice 2

A. a) $\overline{aaa} = a \times 10^2 + a \times 10^1 + a \times 1 = a \times (100 + 10 + 1) = a \times 111 = a \times 3 \times 37$
Tout nombre de cette forme est donc divisible par 37, et le quotient est 3a. Le quotient de la division de 444 par 37 est donc 12 (3x4). Le quotient de la division de 333 par 37 est 9 (3x3) :
444 = 12 x 37
333 = 9 x 37

b) d est une distance possible entre deux arbustes si et seulement si d est un diviseur de 444 et un diviseur de 333. L'ensemble des diviseurs communs de 444 et 333 est égal à l'ensemble des diviseurs du PGCD de 444 et 333. Décomposons ces deux nombres en facteurs premiers :
444 = 2^2 x 3 x 37 333 = 3^2x 37
Le PGCD de 444 et 333 est égal à 3 x 37 = 111 (on prend les facteurs premiers présents dans les deux décompositions, à la plus petite puissance rencontrée). Les diviseurs de 111 s'obtiennent facilement : 1, 3, 37, 3x37.
Les diviseurs communs de 444 et 333 sont donc : 1, 3, 37 et 111.
La distance entre deux arbustes peut être de 1, 3, 37 ou 111 m.

c) Le nombre d'arbustes nécessaires (y compris les arbustes des quatre coins) est égal au nombre d'intervalles sur le pourtour (sur une ligne simple fermée n points déterminent n intervalles). Le nombre d'intervalles sur le pourtour est égal à la longueur du pourtour (2 x (444 + 333) = 1554 m) divisée par la distance séparant deux arbustes, soit 1554/d.

d	1	3	37	111
nombre d'arbustes	1554 / 1 = 1554	1554 / 3 = 518	1554 / 37 = 42	1554 / 111 = 14

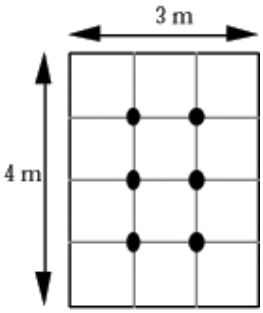
B. d) On a les relations suivantes :

AE = 5/12 AB = (5/12) x 444 = 185 m DF = AE = 185 m

Comme E est sur le segment [AB], on a aussi : EB = 444 - 185 = 259 m et FC = 259 m.

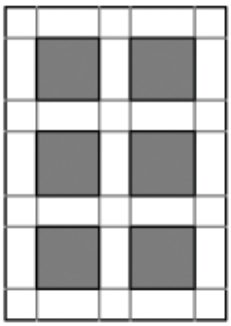
Comme ABCD est un rectangle, on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle BCE rectangle en B : $CE^2=BC^2+EB^2=333^2+259^2=110889$. Donc $CE=\sqrt{110889} \approx 422$m.

e)



La parcelle EBCF est un rectangle de 259 m x 333 m. Chaque rangée de rosiers contient 258 rosiers, et il y a 332 rangées, soit en tout : 258 x 332 = 85 656 rosiers
On peut s'aider d'un schéma représentant la même situation avec des nombres plus petits, par exemple avec un rectangle de 3 m x 4 m , il y a 2 x 3 = 6 rosiers.
Il y a sur chaque rangée et sur chaque colonne, 1 rosier de moins que le nombre d'intervalles de 1 mètre.

C f)



La parcelle AEFD est un rectangle de 185 m x 333 m. La longueur (333 m) se décompose en n x k mètres (longueur des n carrés de k mètres chacun) et (n + 1) intervalles de 1 m, soit en tout (n x k) + n + 1 mètres. D'où :
333 = (k x n) + n + 1
De la même façon la largeur vérifie : 185 = (k x m)+ m + 1
Par exemple si n est égal à 3 et m à 2, les massifs sont disposés comme sur la figure ci-contre

g) On suppose que k, la mesure en mètres du côté de chaque secteur carré, est un nombre entier naturel.
D'après la question précédente :

333 = (k + 1) x n + 1 et 185 = (k + 1) x m + 1

Soit : 332 = (k + 1) x n et 184 = (k + 1) x m

(k + 1) est un diviseur commun à 332 et 184, et comme k (et donc (k+ 1)) doit être le plus grand possible, (k+1) est le PGCD de 332 et 184.

h) Décomposons 332 et 184 en produit de facteurs premiers : 332 = 2^2x 83 et 184 = 2^3x 23
On en déduit :

PGCD (332,184) = 2^2= 4 Il en résulte aussitôt : k + 1 = 4 soit k = 3

On peut alors calculer le nombre n de massifs sur la longueur et le nombre m de massifs sur la largeur n = 332 / (k + 1) = 332/4 = 83 m = 184 / (k + 1) = 184/4 =46
D'où : nombre de massifs de la parcelle = n x m = 83 x 46 = 3818

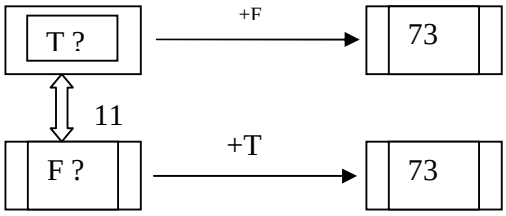
Exercice 3 :

1) Soit *x* la quantité de Mme X et *y* celle de Mme Y
Premier échange : $x+2=y-2$ (1)
Second échange : $2(x-2)=y+2$ (2)
L'équation (1) s'écrit $x+4=y$
Par substitution dans l'équation (2) on obtient $2x-4=x+4+2$ soit $x=10$
On en déduit $y=10+4=14$
On trouve donc que Mme X en a 10 et Mme Y en a 14.

2) Solution algébrique : soit *x* le nombre d'images de Flora et *y* celui de Timothée
$x+y=73$ (1)
$x=y+11$ (2)

Par substitution dans l'équation (1) on obtient $2y+11=73$ soit $2y=62$ soit $y=31$; on en déduit $x=73-31=42$
Flora a 42images et Timothée en a 31.

3) Difficultés que pose cet énoncé à un élève de début de cycle 3.



C'est un problème du champ additif où les deux états initiaux sont inconnus (les lots d'images de Timothée et de Flora) et ils sont combinés pour obtenir des états finaux connus (73 images). Les transformations sont positives et ont pour valeur les valeurs des états initiaux.
Par ailleurs, les deux états initiaux sont liés par une comparaison, donnée par un écart (Flora a 11 images de plus que Timothée). Dans la classification de Vergnaud, ce probleme releve de deux types : état intial – transfo – etat final et comparaison.
Deux opérations sont nécessaires pour résoudre le problème.
Il s'agit d'un problème pour lequel les élèves ne disposent pas de procédure de résolution standard. Ils peuvent tout à fait n'avoir aucune stratégie d'action pour aborder ce problème.
Ils peuvent aussi trouver des valeurs T et F qui vont pour les transformations, mais qui ne respectent pas la comparaison. Ils peuvent alors ne pas savoir comment modifier leur solution pour satisfaire la seconde contrainte.

4) Analyse des réponses des groupes A, B et C.

Groupe A

Ils procèdent par essais successifs pour que le résultat final approche 73. Les additions sont posées et correctes.
Ils font une hypothèse sur le nombre d'images de Timothée : 32
Le premier essai donnant un résultat égal à 75, supérieur à 73, ils essaient un autre nombre 30 (nouvelle hypothèse) plus petit que le premier, réitèrent la procédure précédente et constatent cette fois-ci que la somme 71 est inférieure à 73.
Troisième essai avec 31(plus grand que le précédent mais plus petit que le premier). Cette fois, le résultat est correct ; ce qu'ils vérifient (42+31 = 73 et 31+11 = 42).

Groupe B

Les deux enfants sont nommés.
Il semble que le groupe B distribue les 73 images tout d'abord en dizaines (ce qui peut correspondre à un comptage de dix en dix). L'hésitation traduite par une erreur sur chaque lot peut faire penser que les élèves ont alors posé l'addition centrale pour vérifier le total en prenant en compte le "11" (10+1 de l'addition centrale) qui est alors attribuée à Flora qui " a 11 images de plus " ; le groupe repère qu'il faut ajouter 2 pour obtenir 73 mais fait une erreur dans la distribution et attribue 2 àFlora.
La somme des deux quantités fait bien 73 mais leur différence n'est pas égale à 11. Les élèves ne concluent pas. On ne sait pas s'ils considèrent leur réponse correcte ou s'ils ont réalisé leur erreur.

Groupe C

Les élèves représentent les deux lots mais n'indiquent pas les propriétaires de chacun d'eux. On peut supposer que celui de droite, contenant "11", est celui de Flora.
Les lots sont constitués petit à petit en ajoutant les mêmes quantités au départ (10, 5, 3, 3, 3, 2, 2, 2) jusqu'à obtenir 32 images (erreur de calcul dans le lot de gauche) puis "11" est ajouté au lot de gauche qui alors contient 43 images (répercussion de l'erreur précédente).
Ils additionnent correctement 32 et 43 et obtiennent 75.
Ils constatent que 75 est supérieur à 73. Ils réajustent alors les deux quantités précédentes en supprimant "2" à chacune d'elles. Ils calculent les deux additions, obtiennent 31 et 42. Ils additionnent ces deux nouvelles quantités d'images (31+42 = 73).
Ils ne concluent pas.

5) Procédure valide pouvant être proposée par un élève de fin de cycle 3.

Si j'attribue à Flora les 11 images qu'elle a en plus, il reste à partager en deux parts identiques ce qui reste c'est-à-dire 62 images (73-11=62) ; chaque enfant aura alors 31 images (62 :2=31)
Flora a donc 42images (31+11) et Timothée 31 images.