Exercices d'arithmétique : correction

Exercice 1 :

1) On écrit le nombre cherché $\overline{ab}^{10}$ où a et b sont deux chiffres avec a ≠ 0.
On souhaite avoir 10a+b=2*(a+b), soit 8a=b. Il y a une seule possibilité (car a et b sont inférieurs ou égaux à 9) : a=1 et b=8. Ce nombre est 18.
2) On doit avoir 10a+b=a+b, soit 9a=0, ou encore a=0. Impossible.

Exercice 2 :

1) Soit $\overline{abc}^{10}$ ce nombre. On sait que a=4. On doit avoir
4*100+10b+c=26*(10*b+c), soit 400=250b+25c. Comme b et c sont des chiffres, cela impose b=1 et c=6. Le nombre est 416.
2) On a 100a+10b+c=26*(10b+c), soit 100a=250b+25c, ou encore
4a=10b+c. Il y a plusieurs solutions :

- a=1, b=0, c=4
- a=2, b=0, c=8
- a=3, b=1, c=2
- a=4, b=1, c=6
- a=5, b=2, c=0
- a=6, b=2, c=4
- a=7, b=2, c=8
- a=8, b=3, c=2
- a=9, b=3, c=6

Exercice 3 :

1) Si n est un terme de la suite, son rang est donné par :
(n-le nombre de multiples de 7 présents entre 1 et n), soit (*n-quotient de n par 7*).
Donc le rang de 47 est (47-quotient(47,7))=47-6=41.
Le rang de 741 est 741-qutotient(741,7)=741-105=636.

2) Le terme de rang n a pour valeur *(n+quotient(n-1,6))*.
Donc le terme de rang 26 est 26+quotient(25,6)=26+4=30.
Le terme de rang 52 est 52+8=60.
Le terme de rang 136 est 136+22=158.

Exercice 4 :

Soit $\overline{abc}^{10}$ ce nombre.
On a 100a+10b+c-(100c+10b+a)=297 ⇔ 99a-99c=297 (1)
a+b+c=11 (2)
3a+2b=22 (3)

On fait (3)-2*(2), ce qui donne a=2c.
En reportant dans (1): 99c=297, soit c=3 et a=6.
Puis b=2 d'après (2).
Le nombre est 623.

Exercice 5 :

1) 4321
2) 9876
3) 6543, 6542, 6541, 6532, 6531, 6521, 6432, 6431, 6421, 6321

4) D=N-N'= (1000m+100c+10d+u)-(1000u+100d+10c+m)=999m+90c-90d-999u
5) D=999(m-u)+90(c-d)
6) D est maximum quand (m-u) et (c-d) sont maximum, c'est-à-dire pour (m-u)=8 et (c-d)=6. Il n'y a qu'une seule possibilité : m=9, c=8, d=2, u=1. Par ailleurs, D=8532.
7) D est minimum quand (m-u) et (c-d) sont minimum, c'est-à-dire pour (m-u)=3 et

(c-d)=1. Il y a plusieurs possibilités pour N :
4321
5432
6543
7654
8765
9876
Par ailleurs, D=3087.

Exercice 6 :

1) Prop. A : vrai.

On peut poser la multiplication :

```
   ….2
  *….2
  -----
   ….4
+ …..0
  -----
   ….4
```

Prop. B : faux. contre exemple : $14^2=196$

2) On sait que $100^2=10\,000$ est le plus petit nombre à cinq chiffres. Donc tous les nombres à deux chiffres ont un carré inférieur à 10 000, ils s'écrivent ainsi sur au plus 4 chiffres.

n=10a+5
donc $n^2=(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100(a^2+a)+25$. Il y a (a^2+a) centaines et 25 unités.

Exercice 7 :

1. Il s'agit de $\overline{77}^{8}$, qui a pour valeur 7*8+7=63.

On peut aussi dire que $\overline{77}^{8}=\overline{100}^{8}-1$, soit $8^2-1=63$.

2. $\overline{BB}^{12}=\overline{100}^{12}-1=12^2-1=143$.
3. a) $\overline{100}^{n}-1=n^2-1$

b) on doit avoir $224=n^2-1$, soit $n^2=225$, ou encore n=15. Donc 224 s'écrit sur deux chiffres en base 15, ce n'est pas le cas pour les bases inférieures.

Exercice 8 :

1. Un paquet de niveau 0 contient 1 unité.
   Un paquet de niveau 1 contient 2 unités.
   Un paquet de niveau 2 contient 6 unités.
   Un paquet de niveau 3 contient 24 unités.
   Un paquet de niveau 4 contient 120 unités.

Tout nombre se décompose donc avec les valeurs 1, 2, 6, 24, 120, 720…
Le tableau ci-dessous contient les 20 premiers nombres écrits dans ce système.

120	24	6	2	1		N

		1	1
	1	0	2
	1	1	3
	2	0	4
	2	1	5
1	0	0	6
1	0	1	7
1	1	0	8
1	1	1	9
1	2	0	10
1	2	1	11
2	0	0	12
2	0	1	13
2	1	0	14
2	1	1	15
2	2	0	16
2	2	1	17
3	0	0	18
3	0	1	19
3	1	0	20

Les premiers nombres écrits dans ce système sont donc :
1, 10, 11, 20, 21, 100, 101, 110, 111, 120, 121, 200, 201, 210, 211, 220, 221, 300, 301, 310…

2. 300 = 2*120 + 2*24 + 2*6, soit $\overline{22200}^s$ dans le système.
   720 = $\overline{100000}^s$ dans le système
   2000 = 2*720 + 4*120 + 3*24 + 1*6 + 1*2 = $\overline{243110}^s$ dans le système

3. $\overline{32101}^s$ = 3*120 + 2*24 + 1*6 + 0*2 + 1*1 = 415
4. Le plus grand nombre de 6 chiffres = plus petit nombre de 7 chiffres -1 = $\overline{1000000}^s$ -1, qui a pour valeur dans notre système décimal 5039. Dans le système, ce nombre s’écrit $\overline{654321}^s$.

Exercice 9 :

N est divisible par 45, donc par 5 et 9. Le dernier chiffre b vaut donc 0 ou 5. Comme N est aussi divisible par 6, il est divisible par 2 et 3. Donc N est pair, ce qui implique b=0. D’après le critère de divisibilité par 9, (7+2+a+8+3+0) est un multiple de 9, donc a=7. Le nombre N est 727830.

Exercice 10 :

1. Vrai. Si a est pair, alors il s’écrit a=2k avec k entier naturel. Donc $a^2=4k^2=2*2k^2$, ce qui signifie bien que a^2 est un multiple de 2 (c.à.d. un nombre pair)
2. Vrai. Si 8b76 est un multiple de 3, alors (8+b+7+6) est un multiple de 3 d’après le critère de divisibilité par 3 en base 10. C’est-à-dire (21+b) est un multiple de 3, ce qui impose que b soit un multiple de 3 (puisque 21=3*7).
3. Vrai. Si l’on considère trois nombres consécutifs, on sait déjà que l’un d’entre eux est un multiple de 3. Si le premier des trois nombres est pair, le troisième l’est aussi : cela signifie aussi que soit le premier, soit le troisième est un multiple de 4, et que l’autre est un multiple de 2.
   Comme 3 est premier avec 2 et 4, le produit des trois nombres est donc divisible par 3*4*2=24.

Exercice 11 :

1. Il suffit de trouver le pgcd de 108 et 135. Ce pgcd vaut 27. On peut faire 27 paquets.
2. Dans un paquet, il y aura 108/27=4 billes rouges, et 135/27=5 billes noires.

Exercice 12 :

1. CASA=3*1*6*1=18
2. LYS=12*12*6=864
3. oui, FUN=6*8*1
4. non, 47 est premier, sa décomposition en produit de facteurs premier est unique et est 47. Par conséquent, 47 est aussi la seule décomposition en produit de facteurs de 47, qui n'apparaît pas dans le tableau qui va jusque 13.
5. La décomposition de 46 en produit de facteurs premiers est unique et vaut 2*23. Par conséquent, il n'existe que deux décompositions de 46 en produits de facteurs :

46=46 ou
46=2*23
Ni 46, ni 23 ne sont des valeurs du tableau, c'est donc impossible.

Exercice 13 :

Soit q le quotient et r le reste de la division euclidienne de 40 626 par 12.
D'après la définition de la division euclidienne de deux nombres entiers, on a : $40626 = 12q + r$ et
$0 \leq r < 12$.

Résultat 1

Avec les ordres de grandeur : 12 x 1000 a pour valeur 12 000, qui est largement inférieur à 40 626. On peut donc estimer que le quotient q est supérieur à 1000. Pour cette raison, le résultat 1 est faux.

Résultat 2

18 ne peut être le reste d'une division euclidienne par 12 car 18 > 12.
Pour cette raison, le résultat 2 est faux.
Résultat 3
Si ce résultat était juste, on aurait: 40626 = 12 x 3 382 + 6.
Or le dernier chiffre du calcul 12 x 3 382 + 6 est 0
On ne peut donc trouver 40 626.
Pour cette raison, le résultat 3 est faux.
Résultat 4

Si ce résultat était juste, le reste étant nul, 40 626 serait un multiple de 12 donc de 3 et de4.
Or 40626 n'est pas divisible par 4 car le nombre formé par ses deux derniers chiffres (26) n'est pas divisible par 4.
Pour cette raison, le résultat 4 est faux.

Exercice 14 :

Soit n le nombre de bouteilles. Le reste de la division euclidienne de n par 3, le reste de la division euclidienne de n par 5 et le reste de la division de n par 7 sont égaux à 2. Si on appelle q_l le quotient de la division euclidienne de n par 3, q_2 le quotient de n par 5 et q_3 le quotient de n par 7, on peut écrire:
$n = 3q_l + 2$ $n = 5q_2 + 2$ $n = 7q_3 + 2$ D'où: $n - 2 = 3q_l = 5q_2 = 7q_3$
n - 2 est donc un multiple commun à 3, 5 et 7, c'est-à-dire un multiple du PPCM de 3, 5 et 7, ou encore un multiple de 105 (= 3 x 5 x 7).
D'autre part n est compris entre 1500 et 1600. Donc n - 2 est compris entre 1498 et 1598. Ecrivons les multiples de 105 voisins de ces nombres:
14 x 105 = 1470
15 x 105 = 1575
16 x 105 = 1680
Le seul multiple de 105 compris entre 1498 et 1598 est 1575. n - 2 est donc égal à 1575 et n est nécessairement égal à 1577. Inversement vérifions que 1577 est bien solution du problème:
1577 = 3 x 525 + 2, 1577 = 5 x 315 + 2, 1577 = 7 x 225 + 2
1500 < 1577 < 1600

(le reste de la division de 1577 par 3 est 2) (le reste de la division de 1577 par 5 est 2) (le reste de la division de 1577 par 7 est 2). Le problème admet une unique solution: 1577 bouteilles.

Exercice 15 :

1) Puisque, dans la division euclidienne de a par 1l, le reste est r, il existe un nombre entier unique q tel que: $a = 11q + r$ et on a
$0 \leq r < 11$
De même, il existe un nombre entier unique q' tel que $a' = 11q' + r'$ avec $0 \leq r' < 11$. On a donc $a + a' = 11q + r + 1l\, q' + r'$ soit:
(1) $a+a'=11*(q+q')+(r+r')$.

On sait que $0 \leq r+ r' < 21$; on ne peut donc pas conclure de l'égalité (1) que $r + r'$ est le reste de la division euclidienne de $a + a'$ par 11, car $r + r'$ peut être supérieur ou égal à 11.
Deux cas sont donc possibles.
a.) $r + r' <$ 1l.
Dans ce cas $r + r'$ est le reste de la division euclidienne de $a + a'$ par 11.
b) $11 \leq r + r' < 21$
$r + r' =$ 1l $+ k$ avec $0 \leq k < 10$
en remplaçant dans (1) :
$a + a' =$ 1l $(q + q') + 11 + k$
soit $a + a' = 11(q + q' + 1) + k$
k est donc le reste de la division euclidienne de $a + a'$ par 11.

2) $3a = 3(11\, q) + 3r$ et $0 \leq 3r < 31$
(2) $3a = 11\, (3q) + 3r$.
Trois cas sont donc possibles:
a.) $0 \leq 3r < 11$.
Alors 3r est bien le reste de la division euclidienne de 3a par 11.
b) $11 \leq 3r < 22$.
Dans ce cas, $3r =$ 1l $+ k$ et $0 \leq k < 11$. Donc
$3a = 11(3q) + 11 + k$
$3a = 11(3q + 1) + k$.
k est le reste de la division euclidienne de $3r$ par 11.
c) $22 \leq 3r < 31$.
Dans ce cas, $3r = 22 + k'$ et $0 \leq k' < 9$. Donc $3a = 11(3q) + 22 + k'$
$3a= 11(3q)+2x\ 11 +k'$
$3a = 11(3q + 2) + k'$.
k' est donc le reste de la division euclidienne de $3r$ par 1l.

Exercice 16 :

1. 1001= 11 * 91 + 0

2. $\overline{mcdu}$ = 1000m + 100c + 10d + u = 1001m-m+99c+c+11d-d+u=1001m+99c+11d-m+c-d+u

3. a) mcdu est divisible par 11 si et seulement si (u-d+c-m) est divisible par 11.

Preuve : supposons (u-d+c-m) divisible par 11. Alors il existe un entier naturel k tel que (u-d+c-m)=11k.
Et d’après la question précédente : mcdu=11*91m+11*9c+11d+11k=11*(91m+9c+d+k), ce qui signifie que mcdu est un multiple de 11.

Inversement, si (u-d+c-m) n’est pas un multiple de 11, alors il s’écrit 11k+r avec 0<r<11. Donc mcdu=11*91m+11*9c+11d+11k+r=11*(91m+9c+d+k)+r. Puisque 0<r<11, cette égalité correspond à la division euclidienne de mcdu par 11, et prouve bien que mcdu n’est pas divisible par 11.

b) 3850, 3861, 3806

4. a) On a abmcdu
= 100 000a+10 000b +1000m + 100c + 10d + u
= 100 001a-a+9999b+b+1001m-m+99c+c+11d-d+u
=100001a+9999b+1001m+99c+11d-a+b-m+c-d+u
=11*9091a+11*909b+11*91m+11*9c+11d-a+b-m+c-d+u
=11*(9091a+909b+91m+9c+d) -a+b-m+c-d+u

On a le même critère : abmcdu est divisible par 11 si et seulement si (u-d+c-m+b-a) est divisible par 11.

b) $1{,}2452*10^{11}= 124520 * 10^{6}$

Comme 0-2+5-4+2-1=0 est divisible par 11, 124520 est aussi divisible par 11, et donc $124520 * 10^{6}$ aussi.

Exercice 17 :

1**.** On utilise le signe de division ÷ que l'on trouve sur les calculatrices: en tapant 73956 divisé par 13 sur une calculatrice, on obtient 5 688,9231 (le nombre de chiffres après la virgule dépend de la capacité et des fonctions de la calculatrice utilisée) .
On met alors 73956 en « mémoire plus» (touche M+), puis le produit 5 688 ×13 en « mémoire moins» (M-). En appuyant sur la touche « rappel de mémoire» (MR), on obtient le reste 12; donc: 73956 = 13 × 5688 + 12.

2. Le reste 12 est inférieur d'une unité au diviseur. En ajoutant une unité au dividende, le quotient augmente d'une unité: 73957 = 13 × 5689 et le reste est nul. Si on ajoute au dividende 73956 un nombre compris entre 1 et 12, le quotient de la division euclidienne du nouveau dividende par 13 sera 5689 et le reste sera compris entre 0 et 12.
En retranchant 13 à 73956, le quotient 5688 diminue d'une unité:

73943 = 13 ×5687 + 12.

Ce quotient restera 5687 pour tous les dividendes compris entre 73943 -12 = 73931 et 73943

Exercice 18 :

1. 38=7*5+3.

En comptant de 7 en 7 à partir de 38, on énumère donc les multiples de 7 + 3.

On sait aussi que 365=7*52+1, donc 365 est un multiple de 7 + 1. Le dernier multiple de 7 + 3 cité est donc 365-5=360.

2. Le prochain multiple de 7 + 3 rencontré après 360 est 367. On garde donc la même réponse si l’on remplace 365 par n’importe quel nombre entre 360 et 366 compris.