Chap 5 : Addition et soustraction dans l'ensemble des naturels

✔ Apports théoriques

1. Somme et addition

2 définitions :

- 1ère définition : on suppose connue la suite ordonnée des nombres naturels. La somme $a + b$ est égale au nombre atteint en comptant b nombres après a.
- 2ème définition : $a + b$ est défini à partir de connaissances sur les ensembles.
  a et b sont respectivement les nombres d'éléments d'un ensemble A et d'un ensemble B.
  $a + b$ est le nombre d'éléments de l'ensemble constitué par la réunion de A et B.

2. Différence et soustraction

3 définitions :

- 1ère définition : on suppose connue la suite ordonnée des nombres naturels. La différence $a - b$ est égale au nombre atteint en comptant b nombres avant a.
- 2ème définition : $a - b$ est défini à partir de connaissances sur els ensembles.
  a et b sont respectivement les nombres d'éléments d'un ensemble A et d'un sous-ensemble B de l'ensemble A.
  $a - b$ est le nombre d'éléments de l'ensemble complémentaire de B par rapport à A.
- 3ème définition : $a - b$ est défini à partir de l'addition supposée connue, a étant supérieur ou égal à b, $a - b$ est la solution de l'équation $b + x = a$.

3. Propriétés de l'addition et de la soustraction

Associativité de l'addition : Quels que soient les naturels a, b et c : $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Commutativité de l'addition : Quels que soient les naturels a et b : $a + b = b + a$.

Existence d'un élément neutre (le naturel 0) pour l'addition : Pour tout naturel a, $a + 0 = 0 + a = a$
Pour la soustraction, 0 n'est élément neutre « qu'à gauche » : $a - 0 = a$.

Autres propriétés :
Pour tous naturels a, b et c tels que $a \geq b, a - b = (a + c) - (b + c)$.

Pour tous naturels a, b et c tels que $a \geq b + c$, $a - (b + c) = (a - b) - c$.
Pour tous naturels a, b et c tels que $a \geq b$ et $b \geq c$, $a - (b - c) = (a - b) + c$.

✔ Apports didactiques

Compétences concernant l'addition et la soustraction construites **entre le CP et le CE2**. Compétences de 2 types :

- Etre capable de résoudre des problèmes relevant de ces 2 opérations d'abord par des procédures personnelles puis en utilisant les procédures standard.
- Etre capable de produire le résultat de tout calcul additif ou soustractif en choisissant la méthode la plus adéquate compte tenu des nombres en jeux et des outils disponibles.

1. Le champ conceptuel des structures additives

(problèmes pouvant se résoudre à l'aide d'une addition ou d'une soustraction)

Classification des problèmes : 4 catégories (cf. G. Vergnaud) :

Catégorie 1 : composition de deux états

Dans l'ensemble des naturels.

- **Recherche du composé** :
  Ex : *Dans un bouquet, il y a 8 roses et 7 iris. Combien y a-t-il de fleurs ?*
  8 + 7 = ?
- **Recherche d'une partie** :
  Ex : *Dans un bouquet de 15 fleurs composé de roses et d'iris, il y a 8 roses. Combien y a-t-il d'iris ?*
  8 + ? = 15.

Catégorie 2 : transformation d'un état

Transformation positive ou négative.

- **Recherche de l'état final** :
  Ex : *Jacques avait 17 billes. Il en a gagné 5. Combien en a-t-il maintenant ?*
  $17 \xrightarrow{+5} ?$
  Ex : *Sophie joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 17. Elle doit reculer de 5 cases. Sur quelle case va-t-elle arriver ?*
  $17 \xrightarrow{-5} ?$

- **Recherche de l'état initial** :
  Ex : *Jacques a gagné 5 billes. Il en a maintenant 22. Combien en avait-il avant la partie ?*
  $? \xrightarrow{+5} 22$
  Ex : *Sophie joue au jeu de l'oie. Elle vient de reculer de 5 cases et se trouve à la case 12. De quelle case est-elle partie ?*
  $? \xrightarrow{-5} 12$

- **Recherche de la transformation** :
  Ex : *Jacques avait 17 billes avant de gagner cette partie. Il en a 22 à la fin de la partie. Combien en a-t-il gagné ?*
  $17 \xrightarrow{?} 22$
  Ex : *Sophie joue au jeu de l'oie. Elle était sur la case 17 et elle se trouve maintenant sur la case 12. De combien de cases a-t-elle reculé ?*
  $17 \xrightarrow{?} 12$

Catégorie 3 : comparaison d'états

- **Recherche de l'un des états** :
  Ex : *Bernard possède 25 petites voitures. Il en a 5 de plus (ou de moins) que Charles. Combien Charles en a-t-il ?*
- **Recherche de la « comparaison »** :
  Ex : *Dans un magasin, un jouet vaut 74 €. Il vaut 95 € dans un autre magasin. De combien est-il plus cher dans le 2ème magasin ?*

Catégorie 4 : composition de transformations

- **Recherche de la transformation composée** :
  Ex : *Gérard a joué deux parties de billes. A la 1ère partie, il gagne 7 billes et à la 2ème il en gagne 8. Combien en a-t-il gagné au total ?*
  Ex : *Isidore a joué deux parties de billes. A la 1ère partie, il gagne 7 billes et à la 2ème il en perd 12. Au total, en a-t-il gagné ou perdu ? Et combien ?*

- **Recherche de l'une des composantes** :
  Ex : *Au jeu de l'oie, Julie joue 2 coups. Au 2ème coup, elle avance de 9 cases. Au total, elle s'aperçoit qu'elle a reculé de 4 cases. Que s'était-il passé au 1er coup ?*
  Ex : *Aujourd'hui je sais que j'ai dépensé 56€. Ce matin j'ai dépensé 24€. Combien ai-je dépensé cet après-midi ?*

+ importance de la place de l'inconnue.

2. Procédures utilisées par les élèves

2.1 Les types de procédure

- **Procédures s'appuyant sur une figuration de la réalité** :les objets évoqués sont symbolisés par d'autres objets ou par des dessins ou schémas. A partir de là, l'élève peut avoir recours au comptage pour élaborer la réponse.
- **Procédures utilisant le surcomptage ou le comptage mental** (éventuellement aidé par les doigts).
- **Procédures utilisant un calcul sur les nombres après reconnaissance du calcul à effectuer.**

→ Dans les deux premières procédures, l'élève s'appuie fortement sur la situation évoquée au cours de son traitement.
Dans la 3ème, il a d'abord recours à une traduction mathématique de l'énoncé avant d'effectuer les calculs nécessaires.

2.2 Raisonnements utilisés par les élèves

- Il peut **utiliser un raisonnement qui s'appuie sur le contexte évoqué**. Il transforme le problème posé pour le ramener à un type de problème qu'il sait résoudre.
- Il peut **utiliser un schéma intermédiaire**.
- Il peut aussi **traduire l'énoncé par une équation** (qu'il résout par une addition à trou, une procédure de surcomptage, etc…)
- Il peut **procéder par essais** en faisant une hypothèse sur la réponse.

3. Difficultés rencontrées par les élèves

Facteurs décisifs :
- Structure relationnelle du problème et place de l'inconnue.
- Difficulté des calculs compte tenu de l'âge des élèves.
- Ordre d'apparition des données dans le texte.
- Présence des mots souvent inducteurs d'une opération.

4. Les variables didactiques

- **Taille des nombres et leur taille relative**.
  Ex : *Il y a x cubes dans une boîte, j'en enlève y. Combien y a-t-il maintenant dans la boîte ?*

Valeurs de x et y	Types de procédures
x et y « petits » ex : $x = 5$ et $y=2$	Toutes les procédures sont possibles, y compris le dessin de chaque objet. Le calcul, s'il est reconnu par l'élève, peut être traité mentalement
x « grand » et y « petit » ex : $x = 93$ et $y = 5$	Le dessin devient difficile mais les procédures de type décomptage de 5 à partir de 92 (aide éventuellement par les doigts) sont faciles à mettre en œuvre.
x et y très voisins ex : $x = 98$ et $y = 95$	L'élève peut être incité à transformer le problème posé en 95 + … = 98 et procéder par surcomptage à partir de 96 ou par calcul mental.
x et y « grands » ex : $x = 124$ et $y = 56$	Le recours au calcul apparaît nécessaire : - calcul réfléchi. - Calcul posé ou utilisation de la calculatrice.

- **La configuration des nombres** : nombres ronds par exemple qui rendent les calculs plus faciles et peuvent favoriser le recours à des procédures utilisant des calculs.
- **La mise à disposition ou non d'outils de calcul**.

5. Apprentissage du calcul de sommes et de différences

Difficultés dues à une méconnaissance des résultats de base

Le fait de disposer en mémoire à long terme des résultats de la table ou de méthodes permettant de les fabriquer instantanément est indispensable. Cette mémorisation se fait sur une très longue période est n'est souvent bien assurée qu'au début du CE2.

Difficultés dues à une maîtrise insuffisante de la numération décimale

Par exemple, en calcul mental, pour ajouter 30 à 47, il est utile de savoir repérer rapidement les chiffres des dizaines.

Difficultés à mettre en œuvre les propriétés des opérations

Méconnaissance de certaines procédures de base et des relations entre les nombres et els opérations comme :

- savoir que certains nombres facilitent les calculs (nombres dont la somme est un nombre « rond », nombres terminés par 0…)
- savoir, par exemple, que pour ajouter 19, il est souvent commode d'ajouter 20 puis d'enlever 1.
- savoir qu'on peut remplacer un calcul par un autre.

Difficultés liées à des conceptions erronées relatives à certains nombres ou écritures

- Conception de « 0 » comme « rien ».
- Interprétation du signe « + » comme indice du fait qu'il faut additionner les nombres en présence, d'où des erreurs du type suivant : dans l'exercice 8 + … = 15, certains élèves répondent 23.