Géométrie : corrigé fiche 2

Exercice 1 :

1. Il s'agit de l'union de la perpendiculaire à (AB) passant par A, et de la perpendiculaire à (AB) passant par B, privées des points A et B.
2. Il s'agit du cercle de diametre [AB] privé de A et B.
3. Deux cercles de rayon AB de centres respectifs A et B, privés de A et B.
4. Médiatrice de [AB] privée du milieu de [AB]

Exercice 2 (Grenoble 2005)

1) Les triangles AKB et ALB sont tous deux inscrits dans le cercle de diamètre leur côté commun [AB] : ils sont donc tous deux rectangles, respectivement en K et L.

2) Le triangle AKB étant rectangle en K, on peut écrire : (AL)⊥ (LB). Or M, L, et B sont alignés, donc on a : (AL)⊥ (MB).

Dans le triangle AMB, la droite (AL) est donc la hauteur issue de A.

De la même manière, on montre que, dans ce même triangle, (BK) est la hauteur issue de B.

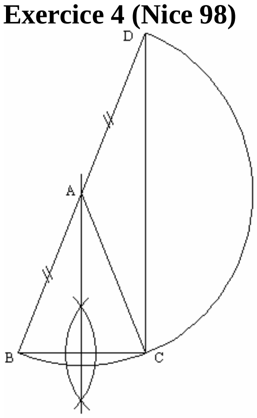
Par ailleurs, toujours dans le triangle AMB, la droite perpendiculaire à (AB) passant par M est la hauteur issue de M.

Les trois droites considérées sont donc les trois hauteurs du triangle MAB ; on en déduit qu'elles sont concourantes, en l'orthocentre du triangle MAB.

3) Cf. méthode vue en TD, à l'aide d'une médiatrice d'un segment bien choisi (distinguer deux cas : le point appartient à la droite, ou ne lui appartient pas).

Exercice 3 : corrigé en classe

Exercice 4 (Nice 98)



(échelle non respectée)

1) ABC est isocèle donc le pied de la hauteur issue de A (H) est le milieu de [BC].
Description de la construction :
Tracer un segment [BC] mesurant 4 cm.
Placer le point H sur le segment [BC] tel que BH = 2 cm.
Construire la médiatrice de [BC].
Placer un point A sur la médiatrice de [BC] tel que AH = 5 cm.
Tracer [AB] et [AC].

2) a) On a : AB = AC = AD Le triangle BCD est donc inscrit dans le cercle de centre A et de rayon AB, qui est le cercle de diamètre [BD] : le triangle BCD est donc rectangle en C. BCD est alors inscriptible dans un cercle de centre A de diamètre [BD] : BCD est rectangle en C.

b) Aire (ABC) = $\dfrac{BC \times AH}{2}$; Aire (BCD) = $\dfrac{BC \times CD}{2}$.

Or, comme A est le milieu de [BD] et H est le milieu de [BC], on sait, d'après le théorème des milieux dans le triangle BCD, que AH = $\dfrac{1}{2} \times CD$; on en déduit que :

Aire (BCD)= 2 Aire (ABC).Or Aire (BCD) = Aire(ABC)+Aire(ACD),
donc Aire (ACD) = Aire (ABC).

Exercice 5 (Rennes 2002)

1) Les droites (HM) et (AI) sont perpendiculaires à la même droite, elles sont donc parallèles entre elles ; de plus :

B, H et A sont alignés, et B, M et I sont alignés, donc d'après le theoreme de Thales, $\dfrac{BH}{BA} = \dfrac{HM}{AI} = \dfrac{BM}{BI}$; de la même manière, en utilisant les points A, H, B d'une part, et A, M, J d'autre part, ainsi que les droites parallèles (HM) et (BI) on a avec ce meme theoreme : $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AM}{AJ} = \dfrac{HM}{BJ}$.

2) $\dfrac{HM}{AI} + \dfrac{HM}{BJ} = \dfrac{BH}{BA} + \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{BH + AH}{AB} = \dfrac{AB}{AB} = 1$

3) On a donc $HM\left(\frac{1}{AI}+\frac{1}{BJ}\right)=1$, soit $HM\left(\frac{BJ+AI}{AI\times BJ}\right)=1$, soit $HM=\frac{AI\times BJ}{AI+BJ}=\frac{6\times 5}{6+5}=\frac{30}{11}\approx$2,7 cm, à 1mm près par défaut.

4) On a vu plus haut que $\frac{AH}{AB}=\frac{HM}{BJ}$; on en déduit que AH= $AB\times\frac{HM}{BJ}=4\times\frac{30}{11\times 5}=\frac{24}{11}\approx$2,2 cm à 1 mm près par excès.

Exercices 6 et 7 : corrigés en classe

Exercice 8

1) Tracé à faire.

Justification : Il est indiqué sur la figure que le quadrilatère RTUE a 4 angles droits : c'est donc un rectangle, et en particulier, on a EU=RT=8 cm, et RE=UT=8 cm (c'est même un carré).

Description du tracé : pour construire la figure, on trace un segment [RA] mesurant 21 cm, et on place sur [RA] le point T tel que RT=8cm.On construit ensuite, à la règle et au compas, une demi-droite [Rx) perpendiculaire à (RA) en R. Sur cette demi-droite, on place le point Q tel que RQ=13cm, puis on place le point E sur [RQ] tel que RE=8 cm. On trace alors le cercle de centre E et de rayon 8 cm, et le cercle de centre T et de rayon 8 cm. On note U le point d'intersection des deux cercles différents de R. On trace le carré REUT.

2) Conjecture : il semble que les points Q, U et A sont alignés. S'ils le sont effectivement, alors on a nécessairement :

Aire(QRA) = Aire(QEU) + Aire(TUA) + Aire (REUT) **(1)**; vérifions si cette égalité est vraie.

Aire(QRA)=$\frac{QR\times RA}{2}=\frac{13\times 21}{2}=136{,}5\ \text{cm}^2$;

Aire(QEU)=$\frac{QE\times EU}{2}=\frac{5\times 8}{2}=20\ \text{cm}^2$; Aire(TUA)=$\frac{TU\times TA}{2}=\frac{8\times 13}{2}=52\ \text{cm}^2$;

Aire(REUT)= $RE\times EU=8\times 8=64\ \text{cm}^2$.

Donc Aire(QEU) + Aire(TUA) + Aire (REUT) = 20 + 52 + 64 = 136 cm^2$\neq$ 136,5 cm^2. L'égalité **(1)** n'est donc pas vérifiée, les points Q, U et A ne peuvent donc pas être alignés.

3) On sait que Q, E, et R sont alignés, et que les droites (EU) et (RA) sont parallèles ; si les points Q, U et A étaient alignés, alors on serait dans une configuration de Thalès, et d'après le théorème de Thalès (sens direct), on pourrait écrire : $\frac{QE}{QR}=\frac{EU}{RA}$. Or $\frac{QE}{QR}=\frac{5}{13}$; $\frac{EU}{RA}=\frac{8}{21}$; or

$\frac{\frac{5}{13}}{\frac{8}{21}}=\frac{5}{13}\times\frac{21}{8}=\frac{105}{104}\neq 1$, donc $\frac{QE}{QR}\neq\frac{EU}{RA}$: les points Q, U et A ne peuvent donc pas être alignés.

Exercice 9 (Besançon 2000)

On trace le segment [AB] en question. On trace une demi-droite [Ax) quelconque (mais non portée sur la droite (AB)).

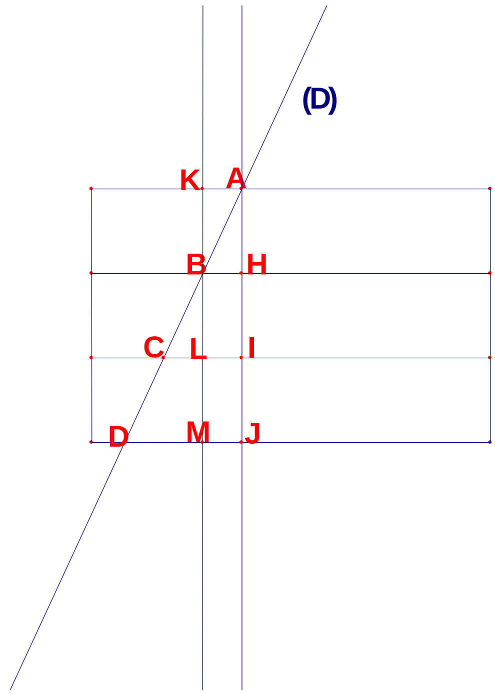
Sur cette demi-droite, on place un point M_1,différent de A ; puis on reporte la longueur M_1 successivement onze fois à partir de M_1 sur la demi-droite [Ax). On place ainsi les points M_2, M_3, …, M_{12}.

On trace ensuite la droite (BM_7), puis la droite parallèle à (BM_7) passant par M_{12}. On note C l'intersection de cette droite avec la demi-droite [AC).

Justifions que cette construction convient : les points A, M_7 et M_{12} d'une part, et A, B, et C d'autre part sont alignés, et la droite (BM_7) est parallèle à (CM_{12}). D'après le théorème de Thalès, on peut donc écrire : $\frac{AM_7}{AM_{12}}=\frac{AB}{AC}$; or $\frac{AM_7}{AM_{12}}=\frac{7}{12}$, donc on a $\frac{AB}{AC}=\frac{7}{12}$, soit $\frac{AC}{AB}=\frac{12}{7}$.

Exercice 10 (Besançon 2005 – Clermont 94)

1. On trace la droite perpendiculaire aux longueurs des trois rectangles et passant par A ; on note H, I et J ses trois points d'intersection successifs avec les côtés du rectangle (cf. figure ci-contre). Comme les rectangles sont de même dimension, on a AH=HI, et donc $\frac{AH}{AI}=\frac{AH}{AH+HI}=\frac{AH}{2AH}=\frac{1}{2}$

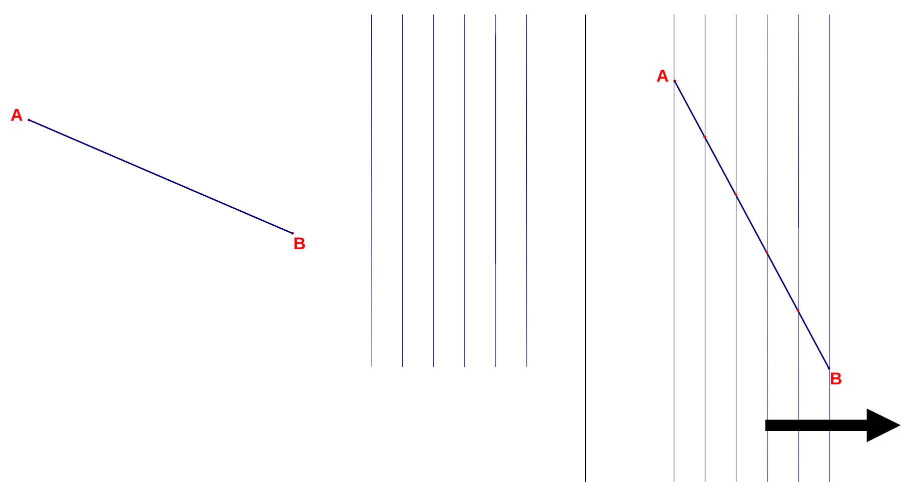


Or comme les points A, B et C sont alignés, et comme les points A, H et I sont alignés, on peut écrire d'après le théorème de Thalès $\frac{AH}{AI}=\frac{AB}{AC}$ et donc $\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$. Comme les poins A, B et C sont alignés dans cet ordre, cela signifie que B est le milieu de [AC], donc que AB=BC.

On peut ensuite tracer la droite perpendiculaire aux longueurs des rectangles et passant par B ; on note K et L et M ses points d'intersection avec les longueurs du rectangle.

Alors, de la même manière, on montre que $\frac{BC}{BD}=\frac{BL}{BM}=\frac{1}{2}$, puis que BC = CD ; on a finalement AB=BC=CD.

2. Dans la question précédente, on a partagé le segment [AD] en 4 parties égales à l'aide d'un réseau de droites équidistantes. On peut reproduire le même processus pour partager un segment en 5 parties égales. L'idée consiste à placer à décalquer le segment, puis à le positionner



sur le guide-âne, de telle sorte que l'une de ses extrémités appartienne à une des lignes du guide-âne, et l'autre extrémité appartienne à la ligne du guide-âne située à 5 cm de la première.		

Exercice 11 (Amiens 2004)

1) O, E, J sont alignés ; O, I et A sont alignés, et (EI) et (JA) sont parallèles : d'après le théorème de Thalès, on a donc $\frac{OI}{OA} = \frac{OE}{OJ}$, soit OE = OJ × $\frac{OI}{OA} = \frac{1}{8}$ =0,125.
2) De la même manière, si OA = x, alors on a OE = $1 \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

(suite : source : Annales Copirelem 2004)

Question 3

<u>Remarque :</u>
La démonstration qui conduit au résultat OE = 0,125 fait appel au Théorème de Thalès qui peut s'appliquer car on sait que les droites (EI) et (JA) sont parallèles.
Dans cette démonstration, le fait que (JO) et (OA) sont perpendiculaires n'intervient pas. On peut donc définir un programme de construction qui découle de cette démonstration valide quel que soit l'angle des droites (JO) et (OA).
Cependant, dans cet exercice, on donne « (JO) et (OA) sont perpendiculaires », ce qui amène un cas particulier de figure (où l'angle entre (OJ) et (OA) est fixé), ainsi le programme de construction lié à cette figure sera un programme particulier qui s'appuie sur un angle déterminé entre les droites (OJ) et (OA) : nous avons choisi de nous placer dans ce cas.

Il s'agit donc de trouver un programme de construction de la figure qui a servi de support à la démonstration précédente à partir d'un segment dont la longueur est le nombre dont on veut trouver l'inverse.
La droite (OJ) peut être considérée comme la médiatrice de segment [AA'], où A' est le symétrique de A par rapport au point O.

Voici un programme de construction :

1) Construire, à la règle graduée, un segment [OA] dont la mesure de longueur exprimée en cm est x, le nombre dont on veut déterminer l'inverse.
2) Avec la règle graduée ou le compas, construire le symétrique de A par rapport à O, c'est à dire le point A' tel que O soit le milieu de [AA'].

3) Avec le compas, construire un point H équidistant de A et de A'. Avec la règle tracer la droite (OH) : cette droite est la médiatrice du segment [AA'] donc (OH) est perpendiculaire à (OA).
4) Avec la règle graduée, placer sur la demi droite [OH) le point J à 1 cm de O et sur la demi-droite [OA), le point I à 1 cm de O.
5) Avec le compas, par report des longueurs des côtés opposés, construire le point K tel que JAIK soit un parallélogramme.
6) La droite (IK) coupe la demi-droite [OJ) au point E tel que (EI) est parallèle à (JA) (côtés opposés du parallélogramme).
   Comme cela a été démontré ci-dessus, la longueur OE est l'inverse de x.

Remarque :
Pour avoir un programme général, il suffit de commencer par tracer deux demi-droites d'angle quelconque (inférieur à 180°), [OJ) et [OA), puis de reprendre les instructions 4), 5) et 6).

Partie II : construction de la racine carrée d'une longueur.

Question 2

Dans le triangle FOK rectangle en O, en appliquant le théorème de Pythagore, on obtient : $FK^2 = FO^2 + OK^2$
Comme AO + OK = AK, du fait que O est un point du segment [AK] et que AO = 13, on déduit OK = AK - AO soit OK = 14 – 13 = 1.

On a donc : $FK^2 = OF^2 + 1^2$ d'où $\mathbf{OF^2 = FK^2 - 1}$ **(1)**

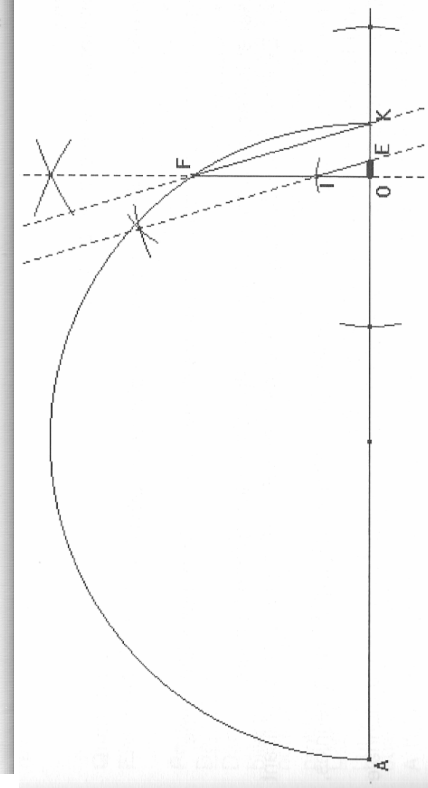
Dans le triangle FOA rectangle en O, par le théorème de Pythagore,
on obtient : $FA^2 = FO^2 + AO^2$
D'où $OF^2 = FA^2 - AO^2$ soit $OF^2 = FA^2 - 13^2$
ou encore $\mathbf{OF^2 = FA^2 - 169}$ **(2)**

Question 3

Par addition des égalités (1) et (2) membre à membre, il vient :
$2 \times OF^2 = FK^2 - 1 + FA^2 - 169$,
ce qui donne :
$\mathbf{2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170}$

Question 4

Le triangle AFK est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AK] ; or tout triangle inscrit dans un demi-cercle et ayant pour côté son diamètre est rectangle avec comme hypoténuse ce diamètre, donc : **le triangle AFK est rectangle en F**.



Question 5

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AFK rectangle en F, on a :
$AK^2 = AF^2 + FK^2$
et comme AK = 14, cela donne $196 = AF^2 + FK^2$.

Or, on a établi à la question 3 que $2 \times OF^2 = FK^2 + FA^2 - 170$
donc $2 \times OF^2 = 196 - 170$ d'où $2 \times OF^2 = 26$

On en déduit $OF^2 = 13$ d'où $\mathbf{OF = \sqrt{13}}$.

Partie III : construction d'un segment de longueur $\frac{1}{\sqrt{11}}$ cm.

On refait la construction de la partie II en partant d'un segment [AK] de longueur 12 cm et avec O point de [AK] tel que [OA] soit un segment de longueur 11 cm.
On obtient le point F, intersection de la perpendiculaire à (AK) passant par O avec un des demi-cercles de diamètre [AK] qui vérifie :

$$OF = \sqrt{11}$$

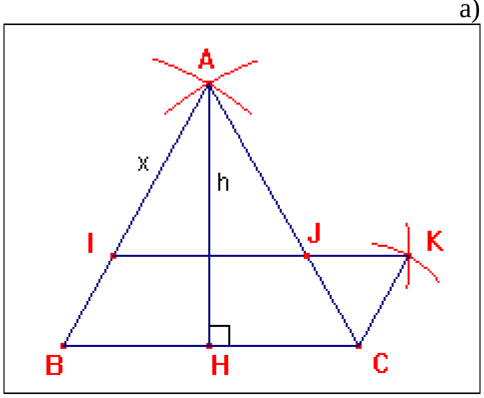
(cela se vérifie aisément en reprenant les calculs de la partie II avec les nouvelles mesures ; on peut aussi établir une généralisation du résultat de la partie II ; si on reprend le raisonnement effectué avec OA = x cm et AK = x + 1 cm, on :
$2 \times OF^2 = FK^2 - 1 + FA^2 - x^2 = FK^2 + FA^2 - 1 - x^2 = (x + 1)^2 - 1 - x^2 = 2x$
d'où $OF^2 = x$ *et* $OF = \sqrt{x}$.*)*

On place alors sur la demi droite [OF) le point I tel que [OI] ait pour longueur 1 cm et la construction de la partie I (tracé de la droite parallèle à (FK) et passant par I) nous fournit le point E de la demi droite [OK) qui vérifie :

$$OE = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Exercice 12 (Besançon 2001)

1) a)



b) Dans le triangle ABC, on sait que : $I \in (AB)$, $J \in (AC)$ et (IJ) // (BC) .
En appliquant le théorème de Thalès, on peut alors écrire : $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$.
Or ABC est équilatéral, donc AB=AC, et donc AI=AJ.
Par ailleurs, comme I appartient au segment [AB], on a : AB= AI+IB, donc IB=AB-AI, et comme AB=AC et AI=AJ, on en déduit que IB=AC-AJ=JC (la dernière égalité étant vraie car $J \in [AC]$).
Les deux segments [IB] et [JC] sont donc de même longueur.

c) Le quadrilatère IJBC a deux côtés parallèles, [IJ] et [BC]: c'est donc un trapèze. De plus, les deux autres côtés sont de même longueur : IJBC est donc un **trapèze isocèle**.
2. a) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H, on obtient : $AH^2=AC^2-HC^2$. Or le triangle ABC est équilatéral, donc la hauteur (AH) relative à [BC] est aussi la médiane relative à [BC], et donc $HC=\frac{1}{2}$ BC=2 cm. Finalement, $AH^2=16-4=12$, et donc $\mathbf{AH=2\sqrt{3}}$ **cm**.

b) On note P le point d'intersection de (AH) et de (IJ). Dans le triangle AHB : I$\in$(AB), P$\in$(AH), et (IP)//(BH). D'après le théorème de Thalès, on peut donc écrire : $\frac{AI}{AB}=\frac{AP}{AH}$, c'est-à-dire $\frac{x}{4}=\frac{h}{H}$, et donc **h=**$\mathbf{2}\sqrt{3}\,\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (en cm)

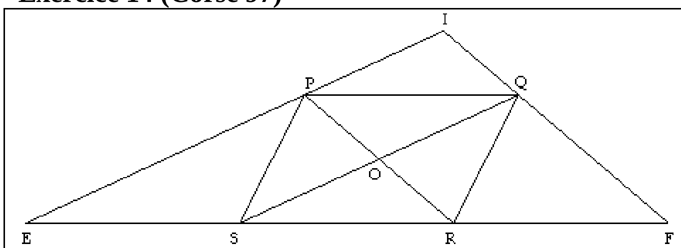
Dans AIJ, (AP) est la hauteur issue de A, et donc l'aire de AIJ est Aire(AIJ)=$\frac{h\times IJ}{2}$ (en cm^2).

En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABC, comme dans la question b), on a aussi $\frac{IJ}{BC}=\frac{AI}{AB}$ et donc IJ=AI=x. Par conséquent, **Aire(AIJ)=**$\frac{hx}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ **(en cm²).**

3) Aire(ABC)=$\frac{AH\times BC}{2}=4\sqrt{3}$ et donc Aire(ABC)=2×Aire(AIJ)$\Leftrightarrow$ $4\sqrt{3}=2\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ $\Leftrightarrow$ $x^2=8$ $\Leftrightarrow$ **x=**$\sqrt{8}$ **=** $\mathbf{2}\sqrt{2}$ **cm** (car $x\geq 0$).

Exercice 13 : corrigé en classe

Exercice 14 (Corse 97)



1) PQFR est un parallélogramme donc (QF) est parallèle à (PR) ; comme I appartient à (QF) et O appartient à (PR), on en déduit que les droites (IQ) et (PO) sont parallèles.
De même, à l'aide du parallélogramme PQSE, on montre que les droites (IP) et (QO) sont parallèles.
Le quadrilatère IPOQ a donc ses côtés opposés parallèles : c'est un parallélogramme.

2) Mettons en évidence une condition nécessaire sur PQRS : pour que IPOQ soit un rectangle, il faut que (PO) soit perpendiculaire à (OQ) : dans ce cas-là, le parallélogramme PQRS a ses diagonales perpendiculaires, c'est donc un losange.
Montrons maintenant que cette condition est aussi suffisante : si PQRS est un losange, alors ses diagonales sont perpendiculaires, et en particulier (PO) est perpendiculaire à (OQ) ; le parallélogramme IPOQ a alors un angle droit ; cela suffit pour dire que c'est un rectangle.
Conclusion : Une condition nécessaire et suffisante pour que IPOQ soit un rectangle est que PQRS soit un losange (autrement dit : **IPOQ est un rectangle si et seulement si PQRS est un losange**.)
De la même manière, pour que IPOQ soit un losange, il faut que PO = OQ ; ceci implique que les diagonales du parallélogramme PQRS sont de même longueur (en effet, comme on sait que PQRS est un parallélogramme, on sait que O est à la fois le milieu de [PR] et de [QS], donc on sait que PR = 2 PO et que QS = 2OQ; si en plus on sait que PO = OQ, alors on a PR = QS). Le parallélogramme PQRS est donc un rectangle.
Réciproquement, si PQRS est un rectangle, alors ses diagonales sont de même longueur, et comme O est le milieu de chacune d'elles, on a : OP=OQ. Le parallélogramme IPOQ a alors deux côtés consécutifs égaux : c'est un losange.
Conclusion : **IPOQ est un losange si et seulement si PQRS est un rectangle**
3) D'une part, PQRS est un parallélogramme, donc (PQ) est parallèle à (RS) ; d'autre part, PQSE est un parallélogramme, donc (PQ) est parallèle à (SE) ; les droites (SE) et (RS) sont donc parallèles, avec un point commun, donc confondues : les points E, S et R sont alignés, et dans cet ordre.
De même, on montre que les points S, R et F sont alignés, dans cet ordre.

Par conséquent, E, S, R et F sont alignés dans cet ordre ; en particulier, on a donc EF = ES + SR + RF ;
Or, toujours en considérant successivement les trois parallélogrammes, on a PQ=SR ; PQ=ES ; PQ=RF, d'où l'on déduit que EF= 3PQ ;
Considérons maintenant le triangle IEF : les points I, P et E sont alignés, les points I, Q et F sont alignés, et les droites (PQ) et (EF) sont parallèles ; d'après le théorème de Thalès, on peut donc écrire : $\frac{IP}{IE}=\frac{PQ}{EF}$, soit ici $\frac{IP}{IE}=\frac{1}{3}$.

Exercice 15 (Aix-Marseille 98)
1) Cette spirale à base triangle équilatéral est composée de 3 arcs de cercle, qui sont des « tiers de cercle » (angle au centre de 120°)

- l'arc de cercle de centre A, de rayon *a*, et d'angle au centre 120°, limité par la demi-droite [AC) et par la demi-droite [AB'), où B' est un point de la droite (AB) tel que A', A et B soient alignés dans cet ordre.
- l'arc de cercle de centre B, de rayon 2*a* et d'angle au centre 120°, limité par la demi-droite [BA'), et par la demi-droite [BC'), où B' est un point de la droite (CB) tel que C, B et B' soient alignés dans cet ordre.
- l'arc de cercle de centre C, de rayon 3*a* et d'angle au centre 120°, limité par la demi-droite [CB'), et par la demi-droite [CC'), où C' est un point de la droite (AC) tel que A, C et C' soient alignés dans cet ordre.

2) Faire le tracé !
Programme de construction :
Soit ABCD un carré de côté *a*.
1. Tracer la droite (AD).
2. Placer sur (AD) un point A' tel que D, A et A' soient alignés dans cet ordre.
3. Tracer l'arc de cercle de centre A, de rayon *a*, d'angle au centre 90°, limité par les demi-droites [AB) et [AA').
4. Tracer la droite (CD).
5. Placer sur (CD) un point D' tel que C, D et D' soient alignés dans cet ordre.
6. Tracer l'arc de cercle de centre D, de rayon 2*a*, d'angle au centre 90°, limité par les demi-droites [DA') et [DD').
7. Tracer la droite (BC).
8. Placer sur (BC) un point C' tel que B, C et C' soient alignés dans cet ordre.
9. Tracer l'arc de cercle de centre C, de rayon 3*a*, d'angle au centre 90°, limité par les demi-droites [CD') et [CC').
10. Tracer la droite (AB).
11. Placer sur (AB) un point B' tel que A, B et B' soient alignés dans cet ordre.
12. Tracer l'arc de cercle de centre B, de rayon 4*a*, d'angle au centre 90°, limité par les demi-droites [BC') et [BB').

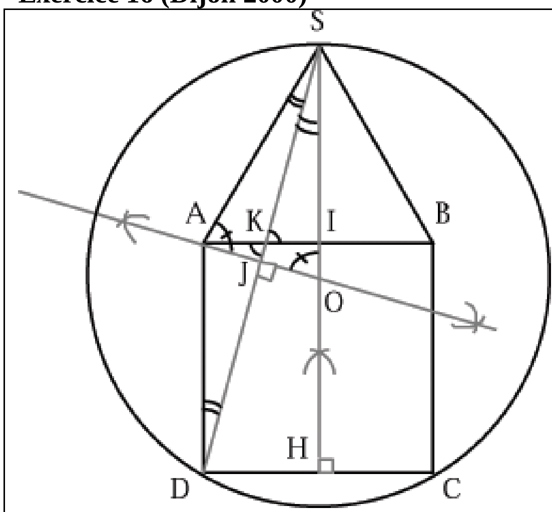
3) Soit $r>0$. Un tiers d'arc de cercle de rayon r a pour longueur $\frac{1}{3}\times 2\times\pi\times r=\frac{2\pi}{3}r$; la longueur de la première spirale est donc égale à $\frac{2\pi}{3}a+\frac{2\pi}{3}\times 2a+\frac{2\pi}{3}\times 3a=\frac{2\pi}{3}\times 6a=4\pi a$.

Un quart d'arc de cercle d'arc de cercle de rayon r a pour longueur $\frac{1}{4}\times 2\times\pi\times r=\frac{\pi}{2}r$; la longueur de la première spirale est donc égale à $\frac{\pi}{2}a+\frac{\pi}{2}\times 2a+\frac{\pi}{2}\times 3a+\frac{\pi}{2}\times 4a=5\pi a$

4) La spirale construite sur un triangle équilatéral de 10 cm de côté a pour longueur 40π (en cm). On cherche donc *a* tel que 5π a = 40 π ; on trouve a = 8 cm. Il faut donc partir d'un carré de côté 8 cm.

5) On a étudié jusqu'à présent deux cas : le cas où la spirale est construite sur un triangle équilatéral de côté a (polygone régulier à 3 côtés), et le cas où la spirale est construite sur un carré de côté a (polygone régulier à 4 côtés). On a vu que les longueurs des spirales étaient alors respectivement égales à $4\pi a$ et $5\pi\, a$. On peut alors faire la conjecture suivante : « la longueur d'une spirale construite à partir d'un pentagone régulier de côté a est égale à $6\pi a$, et plus généralement, la longueur d'une spirale construite à partir d'un polygone régulier à n côtés de côté a est égale à $(n+1)\,\pi a$ ». (Resterait à la prouver, mais ce n'est pas demandé ici).

Exercice 16 (Dijon 2000)



1. La droite (SH) est perpendiculaire à (CD), donc, comme ABCD est un carré, elle est aussi perpendiculaire à (AB). On note I le point d'intersection de (AB) avec (SH) ; (SI) est donc la hauteur issue de S dans le triangle équilatéral SAB, donc aussi la médiane relative à [AB], et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle SIA rectangle en I, on a :

$SI^2 = SA^2 - AI^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$, donc $SI = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; enfin SH = IH + SI = $a + \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Comme S, C et D appartiennent au cercle de centre O, O est donc le centre du cercle circonscrit au triangle SDC et est donc le point d'intersection des médiatrices des trois côtés. Dans le triangle équilatéral SAB, (SH) est la hauteur relative à [AB], donc est aussi la médiatrice de [AB], et comme ABCD est un carré, (SH) est aussi la médiatrice de [CD].
Conclusion : O est le point d'intersection de la médiatrice de [SD] (à construire) avec la droite (SH).

3. Le triangle (ASD) est isocèle de sommet A puisque AS = AD = a. On a donc : $\widehat{ASD} = \widehat{ADS}$.
De plus, les droites (AD) et (SH), perpendiculaires à (CD), sont parallèles. La droite (SD) coupe ces deux droites et détermine deux angles alternes internes égaux : $A\hat{D}S = D\hat{S}H$. Par conséquent $A\hat{S}D = D\hat{S}H$, et le droite (SD) est donc la bissectrice de l'angle $A\hat{S}O$.
4. On note J le point d'intersection des diagonales (AO) et (SD) du quadrilatère SODA; on a AS= AD = a (énoncé), et OS=OD (car S et D appartiennent au cercle (C) de centre O) ; donc O et A sont chacun à égale distance de S et D, donc (OA) est la médiatrice de [SD] ; par conséquent (SD) est perpendiculaire à (OA), et les triangles SAJ et SJA sont tous les deux rectangles en J. De plus, d'après la question précédente, leurs angles respectifs $A\hat{S}J$ et $J\hat{S}O$ sont égaux ; on en déduit que les « troisièmes angles » $J\hat{A}S$ et $J\hat{O}S$ sont aussi égaux. Par conséquent, le triangle ASO est isocèle en O, et donc AS=OS.
On en déduit que SA=AD=OS=OD, et donc que le quadrilatère SODA est un losange. Par conséquent le rayon du cercle est égal à a.

Exercice 17 (Strasbourg 96)1. La croix est posée de telle sorte que A (l'œil du bûcheron), Q (une extrémité de la croix) et C (le sommet de l'arbre) sont alignés ; de plus A, P et B (le pied de l'arbre) sont alignés, et les droites (QP) et (BC) sont parallèles (car toutes les deux perpendiculaires au sol, modélisé par la droite (AB)). D'après le théorème de Thalès, on peut écrire que dans ces conditions, $\frac{AP}{AB}=\frac{QP}{BC}$, et donc $BC=\frac{QP\times AB}{AP}$; mais la croix est construite de telle sorte que AP= PQ, et donc on a en fait : BC =AB.

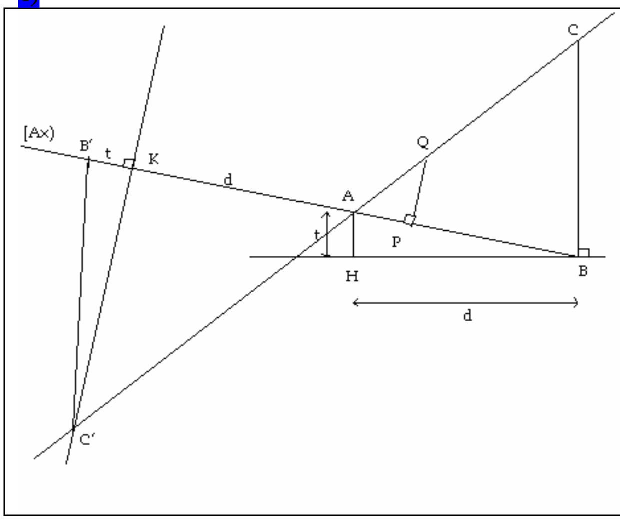
Autrement dit si la croix est posée comme on vient de le décrire, il suffit de mesurer la distance de l'observateur au pied de l'arbre pour obtenir la hauteur de l'arbre. Mais ceci n'est pas très pratique, car il faut que l'œil du bûcheron soit au ras du sol, et que le bûcheron se positionne de telle sorte que quand il voit le point Q de la croix, il voit « dans l'alignement », le sommet de l'arbre.

2. Cette fois-ci l'œil du bûcheron n'est plus au ras du sol. Le bûcheron, debout, se place à une distance de l'arbre choisie telle que, en alignant l'hypoténuse de la croix selon la direction « œil-sommet de l'arbre », le côté [AP] de la croix est aligné selon la direction « œil-pied de l'arbre ».

a) $B\hat{A}C=P\hat{A}Q$, or $P\hat{A}Q=45°$ (car PAQ est un triangle rectangle isocèle), donc $B\hat{A}C=45°$.

b) Théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABH. Montrer que AB = $\sqrt{t^2+d^2}$

c)



d) Par construction (KC') est perpendiculaire à (AB), donc le triangle AKC' est rectangle en K. De plus, les angles $K\hat{A}C'$ et $B\hat{A}C$ sont opposés par le sommet, donc égaux ; comme $B\hat{A}C=45°$, alors la mesure de $K\hat{A}C'$ est aussi égale à 45° ; le triangle rectangle AKC' a un angle de 45° : il est donc rectangle isocèle en K.

e) Comme AKC' est isocèle en K, on sait que AK = KC'= d. Dans le triangle B'KC' rectangle en K, d'après le théorème de Pythagore, on a $B'C'^2 = B'K^2 + KC'^2 = t^2 + d^2$.

Donc B'C'=. $\sqrt{t^2+d^2}$ =AB.

Par ailleurs HB = KC' Les deux triangles rectangles AHB et B'KC' ont donc leurs côtés de l'angle droit deux à deux égaux. Ils sont donc superposables.

f) $B'\hat{C}'A = B'\hat{C}'K + K\hat{C}'A = B'\hat{C}'K + 45°$

Or, comme les triangles AHB et B'K'C' sont superposables, on a $B'\hat{C}'K = A\hat{B}H$, donc $B'\hat{C}'A = A\hat{B}H + 45°$.

Par ailleurs $A\hat{C}B = 180° - B\hat{A}C - A\hat{B}C = 180° - 45° - A\hat{B}C = 135° - A\hat{B}C = 135° - (90° - A\hat{B}H) = 45° + A\hat{B}H$,

ce qui montre que les angles $\widehat{B'C'A}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux. La droite (CC') coupe donc les deux droites (B'C') et (BC) en formant deux angles alterne internes égaux : on en déduit que ces deux dernières droites sont parallèles.

g) Les points C', A et C sont alignés, et d'autre part, les points B', A et B sont alignés ; de plus : (B'C')//(BC). Le théorème de Thalès permet donc d'affirmer que : $\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{AB'}$; en utilisant les questions précédentes, on en déduit que $BC = B'C'\times\frac{AB}{AB'} = \sqrt{t^2+d^2}\,\frac{\sqrt{t^2+d^2}}{d+t} = \frac{t^2+d^2}{d+t}$, ce qui permet de calculer la hauteur de l'arbre en fonction de *d* et *t*, qui sont directement mesurables.

h) Avec t = 1,5 m et d = 20 m, la taille réelle de l'arbre est égale à BC=$\frac{1{,}5^2+20^2}{21{,}5}$≈18,71 m (au cm près par excès), alors que la distance du pied de l'observateur au pied de l'arbre (valeur donnée par la première visée) est égale à *d = 20m*.

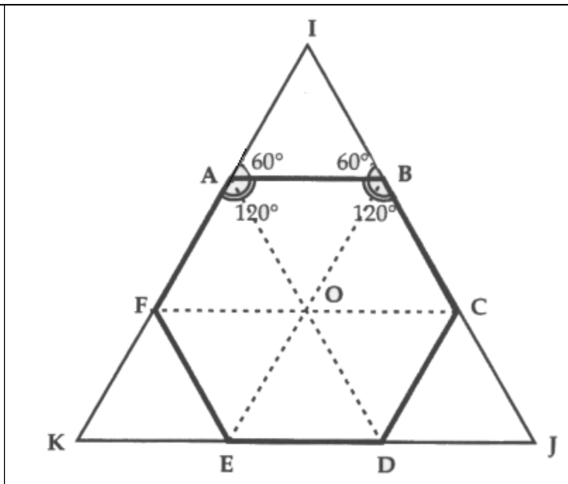
L'erreur relative est donc égale à $\frac{20-BC}{BC} \approx 6\%$, ce qui est une erreur relativement importante.

Exercice 18 (Aix-Marseille 96)

a) Les angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}, \widehat{F}$ situés aux sommets de l'hexagone régulier mesurent chacun 120°.

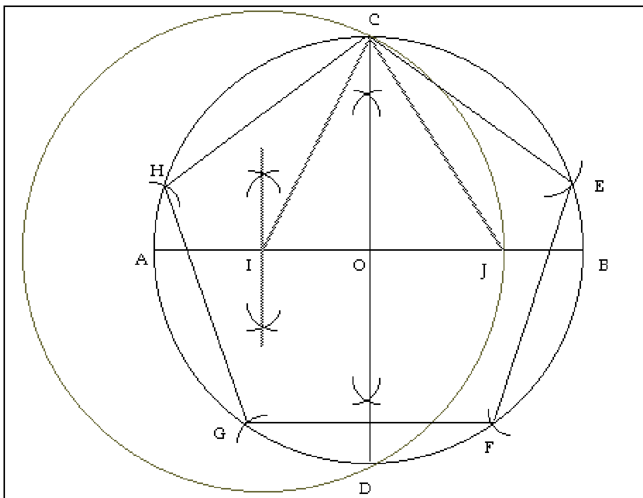
Les points I,A et F sont alignés, donc les angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{FAB}$ sont supplémentaires, donc : $\widehat{IAB}$ =60°.

De la même manière, au sommet B, on a $\widehat{IBA}$ =60°. Le triangle IAB possède donc deux angles de 60°. Le troisième angle $\widehat{AIB}$ mesure donc aussi 60° (car la somme des angles d'un triangle est égale à 180°) .
Le même raisonnement appliqué aux triangles CJD et EKF montre que les angles $\widehat{J}$ et $\widehat{K}$ du triangle IJK mesurent 60°. IJK est un triangle équilatéral.



b) Soit O le centre de l'hexagone. Les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont équilatéraux. A la question **a)** nous avons montré que les triangles IAB, JCD et KEF sont aussi équilatéraux. Tous ces triangles sont isométriques : la longueur de leurs côtés est celle du côté de l'hexagone. Le triangle IJK est constitué de 9 de ces triangles et l'hexagone ABCDEF de 6 de ces triangles. Le rapport des aires a donc pour valeur $\frac{9}{6} = 1{,}5\,\text{cm}$.

Exercice 19(Besançon 97) CONSTRUCTION DU PENTAGONE REGULIER A LA REGLE ET AU COMPAS



b) Le triangle IOC est rectangle en O. Le théorème de Pythagore donne :

$$IC^2 = IO^2 + OC^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{5}{4}r^2$$

D'où : $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}r$.

c) Selon la construction de l'énoncé, la longueur du côté du pentagone est égale à CJ. En appliquant le théorème de Pythagore au triangle COJ on obtient : $CJ^2 = OC^2 + OJ^2$

Or : $OJ = IJ - OI = IC - OI = \frac{\sqrt{5}}{2}r - \frac{1}{2}r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

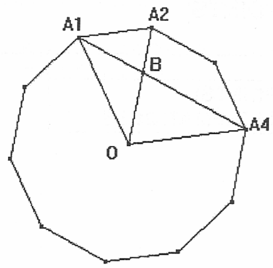
D'où : $CJ^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 r^2 = r^2\left(1 + \frac{5+1-2\sqrt{5}}{4}\right) = r^2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{4}\right)$ et donc $CJ = r\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$

Exercice 20 (Grenoble 2003) (source : annales copirelem)

Question 1

Dans le triangle OA_1A_2

$\widehat{A_1OA_2}$ est l'angle au centre dans le décagone régulier convexe. Il mesure donc le dixième de 360°, soit 36°.
En considérant le triangle isocèle OA_1A_2 (car $OA_1 = OA_2 = R$), on trouve la mesure de l'angle $\widehat{OA_1A_2}$: (180 - 36) : 2 = 72°
De même l'angle $\widehat{OA_2A_1}$ mesure aussi 72°.



Dans le triangle OA_1A_4

Les angles $\widehat{OA_1A_4}$ et $\widehat{OA_4A_1}$ sont des angles du triangle isocèle OA_4A_1 (car $OA_1 = OA_4 = R$).
Or l'angle $\widehat{A_1OA_4}$ mesure 3 x 36°, soit 108°.
Ils mesurent donc 36° car (180-108) : 2 = 36°

Question 2

Dans le triangle OA_1B

L'angle $\widehat{OA_1B}$ est aussi l'angle $\widehat{OA_1A_4}$; il mesure donc 36°.
L'angle $\widehat{A_1OB}$ est aussi l'angle $\widehat{A_1OA_2}$; il mesure donc 36°.
D'où l'angle $\widehat{A_1BO}$ qui mesure 180 – 2 x 36, soit 108°.

Dans le triangle OBA_4

Des mêmes raisonnements conduisent à trouver pour les angles du triangle OBA_4 les mesures suivantes : $\widehat{OBA_4}= 72°$ $\widehat{BOA_4} = 72°$ $\widehat{OA_4B} = 36°$

<u>Dans le triangle BA_1A_2</u>

L'angle $\widehat{OA_2\,A_1}$ égal à $\widehat{OA_1\,A_2}$ (72°). L'angle $\widehat{A_1BA_2}$ mesure 72° comme $\widehat{OBA_4}$ (angles opposés par le sommet).

L'angle BA_1A_2 est le troisième angle du triangle isocèle B A_1 A_2: il mesure donc 36°.

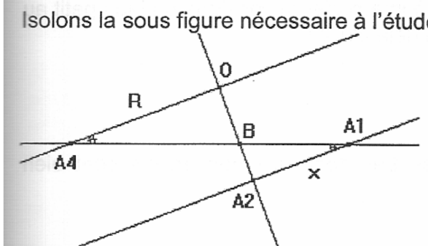
Question 3

Le triangle OA_1B est isocèle en B car il a deux angles de même mesure 36°,
donc $OB = BA_1$.
De même le triangle BA_1A_2 est isocèle en A_1 et donc $BA_1 = A_1A_2$
L'égalité des trois longueurs OB, BA_1 et A_1A_2 est donc prouvée.

Si $A_1\,A_2= x$ et $A_1\,A_4 =y$,
$y - x = A_1\,A_4 - A_1\,A_2 = (A_1B + BA_4) - BA_1 = BA_4 = R$ (en effet, B appartient à $[A_1A_4]$
On trouve bien $\mathbf{y - x = R}$.

Question 4

Isolons la sous figure nécessaire à l'étude.



Les droites (OA_4) et (A_1A_2) sont parallèles car les angles alternes internes (,BA_4O et ,BA_1A_2) déterminés par la sécante $(A_1\,A_4)$ sont égaux à 36°.
Les deux sécantes (A_1A_4) et (OA_2) coupant les deux parallèles (OA_4) et (A_1A_2) déterminent une configuration de Thalès : les triangles sont donc semblables, les longueurs des côtés sont donc proportionnelles.

Donc $\dfrac{A_1A_2}{OA_4} = \dfrac{BA_2}{BO}$

Donc $\dfrac{x}{R} = \dfrac{R-x}{x}$

On obtient
$x^2 = R^2 - Rx$ soit $x (x + R) = R^2$ soit $\mathbf{xy = R^2}$, d'où : $\sqrt{\mathbf{xy}} = \mathbf{R}$