PE1 2006-2007 **NUMERATION – ARITHMETIQUE**

Exercice 1.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses.

1. Tout multiple de 3 est multiple de 9.
2. Un nombre divisible par 4 est divisible par 2.
3. Un nombre divisible par 2 est divisible par 4.
4. Tout nombre divisible par 12 est divisible par 24.
5. Tous les nombres premiers sont impairs.
6. La somme de deux nombres premiers est un nombre premier.

Exercice 2.

1. Le PGCD de deux nombres est 18. Leur PPCM est 648. Quels sont ces deux nombres ?
2. Trouver le PGCD et le PPCM des nombres 4125 et 2700. Calculer le produit de ces 2 nombres puis le produit de leur PGCD par leur PPCM. Que constate-t-on ?

Exercice 3.

1. Comment utiliser une calculatrice pour obtenir la division euclidienne de 73 956 par 13 ?
2. Que faut-il ajouter ou retrancher au nombre 75 956 pour que le quotient de ce nombre dans la division euclidienne par 13 augmente ou diminue d'une unité ?

Exercice 4.

Vous comptez de 7 en 7 à partir de 38 jusqu'au plus grand nombre entier strictement inférieur à 365.

1. Quel est le dernier nombre nommé ?
2. Par quels nombres entiers positifs pourrait-on remplacer le nombre 365 de l'énoncé de sorte que les réponses obtenues à la première question restent valides ?

Exercice 5. Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice 1999

Un nombre à trois chiffres a 4 pour chiffre des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à 2 chiffres obtenu en enlevant le chiffre des centaines.
Trouver ce nombre.

Exercice 6. Bordeaux 2003

On cherche à déterminer un nombre composé de trois chiffres dont la somme est 16. Si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des dizaines, le nombre augmente de 450 et si l'on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités il augmente de 198.
Déterminer ce nombre.

Exercice 7. Créteil, Paris, Versailles 2000

Soit A un nombre entier naturel.
a) Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le carré d'un nombre entier naturel. Cette condition est-elle suffisante ?
b) Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le produit de deux entiers consécutifs. Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 8. Amiens 2001

Problème 1 : Des billes doivent être partagées entre deux enfants de telle sorte que le produit du nombre de billes attribuées au premier par le nombre de billes attribuées au second soit égal à 285.

Quels sont tous les résultats possibles du partage?

Problème 2 : Trois personnes ont reçu chacune une somme d'argent différente exprimée en euro (nombre entier). Soit S_1 le montant reçu par la première personne, S_2 le montant reçu par la deuxième personne et S_3 le montant reçu par la troisième personne. Sachant que $S_1 x S_2 x S_3 = 2\,431$, déterminez toutes les solutions possibles.

Problème 3 : Dans un jeu, une cagnotte d'un montant exprimé par un nombre entier inférieur à 4 000 € est partagée entre les gagnants. Chacun reçoit 129 €. Il reste 28 €dans la cagnotte. Quel est le montant maximal de la cagnotte?

Exercice 9. Lyon 1997

Dans cet exercice on ne considère que des entiers naturels.

1) Montrer que la somme de trois nombres entiers consécutifs est un multiple de 3.

2) Soit N un nombre somme de quatre entiers consécutifs. Montrer que N-2 est multiple de 4.

3) Avec quelle condition sur N la réciproque est-elle vraie ?

4) La somme de 51 nombres entiers consécutifs est 1785, quels sont ces nombres ?

(Indication : on rappelle que pour tout entier p, on a : $1 + 2 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ *)*

Exercice 10. Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice 2000

Le but de cet exercice est de déterminer un nombre entier a.

- ce nombre s’écrit avec 4 chiffres,
- il est supérieur à 7000,
- il est multiple de 45,
- il est impair
- et le chiffre des milliers est le double de celui des centaines.

Quel est ce nombre ?

Exercice 11. d’après Nancy 1993

Un nombre A s’écrit avec trois chiffres. En permutant ses chiffres des dizaines et des unités, on obtient un nombre B. En permutant les chiffres des dizaines et des centaines de A on obtient un nombre C. En permutant les chiffres des unités et des centaines de A on obtient un nombre D. Sachant que A-B = 18 et que C-A = 360

1. Calculer D-A.
2. Montrer que A est multiple de 3.
3. Trouver A sachant qu’il est multiple de 9 (donner toutes les solutions).

Exercice 12. Bordeaux, Caen… 2000

Le service des espaces verts veut border un espace rectangulaire de 924 m de long sur 728 m de large à l’aide d’arbustes régulièrement espacés. Un arbuste sera placé à chaque angle du terrain. La distance entre deux arbustes doit être un nombre entier de mètres.

1) Déterminer toutes les valeurs possibles de la distance entre deux arbustes.

2) Déterminer, dans chaque cas, le nombre d’arbustes nécessaires à la plantation.

Exercice 13. Créteil 2002

Soit A un nombre entier naturel.

a) Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le carré d'un nombre entier naturel. Cette condition est-elle suffisante ?

b) Trouver une condition nécessaire sur le dernier chiffre de A pour que A soit le produit de deux entiers consécutifs. Cette condition est-elle suffisante ?

Exercice 14. Lyon Grenoble 2002

Un entier naturel n est divisible par 11 si et seulement si la différence : (1^{er} chiffre en partant de la droite + $3^{ème}$ chiffre + $5^{ème}$ chiffre + …) – ($2^{ème}$ chiffre en partant de la droite + $4^{ème}$ chiffre + $6^{ème}$ chiffre + …) est divisible par 11 (ou la somme des chiffres de rang impair diminuée de la somme des chiffres de rang pair est divisible par 11).

Exemples :

6457 est divisible par 11 ; en effet : (7 + 4) – (5 + 6) = 0 ;
19 346 701 est divisible par 11 ; on a : (1 + 7 + 4 + 9) – (0 + 6 + 3 + 1) = 11 ;
1 919 192 est divisible par 11 ; on a : (2 +1 + 1 + 1) – (9 + 9 + 9) = - 22 ;
987 654 321 n'est pas divisible par 11 car (1 + 3 + 5 + 7 + 9) – (2 + 4 + 6 + 8) = 5 ;

1) On considère tous les nombres entiers naturels de quatre chiffres différents écrits avec les chiffres 2, 5, 6 et 9.
a) Parmi ces nombres déterminez-en un qui est divisible par 11.
b) Parmi ces nombres déterminez tous les nombres qui sont divisibles par 11. Ecrivez-les.
2) On considère tous les nombres entiers naturels de six chiffres différents écrits avec les chiffres 1, 2 3, 4, 5, et 6. Parmi ces nombres, existe-t-il un nombre qui est divisible par 11. Justifiez votre réponse.

Exercice 15. Nancy-Metz 94

Pour son anniversaire, Charlie a eu des chocolats.

- Combien ? demande Bruno.
- Je me rappelle seulement, dit Charlie, qu'il y en avait moins de 100 et que lorsque je les ai répartis en tas de 2, puis de 3 et enfin de 4, il m'en restait 1 à chaque fois, mais lorsque je les ai mis en tas de 5, il n'en restait pas.

Combien de chocolats Charlie a-t-il eu pour son anniversaire ?

Exercice 16. Bordeaux, Caen… 2000

Les lettres a et a' représentent des nombres entiers naturels.
Dans la division euclidienne de a par 11, le reste est r.
Dans la division euclidienne de a' par 11, le reste est r'.
Déterminer le reste :
a) dans la division euclidienne de $a + a'$ par 11.
b) dans la division euclidienne de $3a$ par 11.

Exercice 17. Grenoble, Lyon 2000

On s'intéresse au quotient et au reste de la division euclidienne de 40 626 par 12. Voici quatre résultats, tous erronés.

N° du résultat	Quotient	Reste
1	348	8
2	3384	18
3	3382	6
4	3383	0

Sans s'appuyer sur le calcul effectif du quotient et du reste, expliquez pourquoi ces résultats ne sont pas corrects. Pour cela, on utilisera un argument pour chacun des résultats ; ces quatre arguments doivent être de nature différente.

Exercice 18. Nancy 2002

Déterminer le nombre N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :

N est divisible par 6 ; N n'est pas divisible par 8 ; N a exactement 15 diviseurs.
On rappelle que si la décomposition d'un nombre en facteurs premiers est de la forme $A^aB^bC^c$…, alors le nombre de ses diviseurs est $(a+1)(b+1)(c+1)$…

Exercice 19. Lyon Grenoble 2002

Un supermarché reçoit une livraison de bouteilles. Si l'on compte les bouteilles par 3, 5 ou 7, il en reste toujours 2.
Sachant que le nombre de bouteilles livrées est compris entre 1500 et 1600, combien de bouteilles le supermarché a-t-il reçues ?

Exercice 20. Aix Marseille 2005

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes en justifiant les réponses.
1) Si a est un nombre entier pair alors a^2 est aussi un nombre entier pair.
2) a et q sont deux nombres entiers naturels. L'égalité $a=13q+18$ montre que q est le quotient euclidien de a par 13.
3) Si le nombre à quatre chiffres $8b76$ est un multiple de trois alors le nombre b est un multiple de 3.
4) Le produit de trois nombres consécutifs dont le premier est pair est divisible par 24.

Exercice 21. Montpellier 93 Tous les raisonnements et calculs devront être clairement explicités.

1. Trouver l'écriture chiffrée du nombre $1 + 3 + 3^2 + 3^4 + 3^6$ en base trois.
2. Trouver l'écriture de ce même nombre en base neuf.
3. Trouver l'écriture chiffrée du nombre $5 \times (5 \times (5 \times (5 + 4) + 3) + 2) + 1$ en base cinq.
4. Pour écrire un nombre dans la base seize, on utilise les chiffres 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F.Trouver l'écriture chiffrée du nombre $(4^3 - 1) \times (4^3 + 1)$ en base seize.

Exercice 22. Orléans-Tours 98

On convient que $\overline{abc}^6$ est l'écriture d'un nombre en base six. Par exemple, le nombre entier 103 s'écrit $\overline{251}^6$ en base six.

1) Quel nombre entier est représenté par $\overline{132}^6$? Ce nombre est-il un multiple de 6 ? Est-il multiple de 2 ?
2) Montrer que $\overline{324}^6$, $\overline{222}^6$, $\overline{550}^6$ sont multiples de 2. Sont-ils multiples de 6 ?
3) Montrer que $\overline{abc}^6$ est multiple de 2 si $c = 0$ ou $c = 2$ ou $c = 4$. A quelle condition est-il multiple de 6 ?
4) Enoncer les théorèmes de divisibilité par 6 et par 2 à partir de l'écriture <u>en base six</u> d'un nombre.
5) a) Montrer que $\overline{325}^6$, $\overline{212}^6$, $\overline{555}^6$ sont multiples de 5.
   b) Quel critère de divisibilité par 5 pourrait-on énoncer ? *(on pourra éventuellement remarquer que la base est égale à* $5 + 1$)

Exercice 23. Montpellier 94

1. Déterminer la base a (si elle existe) dans laquelle $\overline{113}^a=\overline{21}^a+\overline{32}^a$.
2. Déterminer la base b (si elle existe) dans laquelle $\overline{26}^b+\overline{12}^b=\overline{43}^b$.