Exercice 2 Lyon 2005

Question 1

Nombre d'entiers naturels à 2 **chiffres,** à 3 **chiffres,** à 4 **chiffres**

Les entiers naturels s'écrivant avec 2 chiffres sont ceux compris entre 10 et 99 ; il Y en a 90 (10 commençant par 1, 10 commençant par 2, ..., 10 commençant par 9). Les entiers naturels s'écrivant avec 3 chiffres sont ceux compris entre 100 et 999 ; il Y en a 900 (100 commençant par 1, 100 commençant par 2, ..., 100 commençant par 9).

Les entiers naturels s'écrivant avec 4 chiffres sont ceux compris entre 1000 et 9999 ; il y en a 9000 (1000 commençant par 1, 1000 commençant par 2, ..., 1000 commençant par 9).

Donc, Il y a **90 nombres** à 2 **chiffres, 900 nombres** à 3 **chiffres et 9000 nombres** à 4 **chiffres.**

Question 2a

Nombre d'entiers naturels à 3 chiffres tous identiques

Il Y a 9 entiers naturels à 3 chiffres dont les trois chiffres sont identiques:

111 ; 222 ; 333 ; 444 ; 555 ; 666 ; 777 ; 888 ; 999.

Question 2b

Nombre d'entiers naturels à 3 chiffres tous différents

On a 9 choix pour le premier chiffre (n'importe quel chiffre sauf 0), puis 9 choix encore pour le deuxième chiffre (n'importe quel chiffre sauf celui choisi comme chiffre des centaines) et enfin 8 choix pour le troisième chiffre (n'importe quel chiffre sauf ceux choisis pour les centaines et pour les dizaines) d'où:

9 x 9 x 8 = 648 . Il y a donc 648 nombres à 3 chiffres tous différents.

Question 2c

Nombre d'entiers naturels à 3 chiffres ayant exactement deux chiffres différents

Considérons la partition suivante de l'ensemble des 900 nombres à trois chiffres:

- o Ceux dont l'écriture utilise 3 chiffres différents (il y en a 648 d'après laquestion 2b) ;
- o Ceux dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents;
- o Ceux dont les trois chiffres sont identiques (on a vu à la question **2a** qu'il y en a 9).

Le nombre recherché est donc: 900 - 648 - 9 = 243. Il y a 243 nombres à trois chiffres dont l'écriture utilise exactement 2 chiffres différents.

Question 2d

Pourcentage de nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre répété

Les nombres à 3 chiffres ayant au moins un chiffre répété sont ceux des questions **2a** et **2c**: ceux ayant trois chiffres identiques et ceux ayant exactement deux chiffres répétés; il y en a donc: 9 + 243 = 252.

Il y a ainsi 252 nombres à trois chiffres ayant au moins un chiffre répété parmi 900 nombres à trois chiffres. Leur proportion est donc: 252/900= 0,28 soit 28%.

Exercice 3La Réunion 2005

Question 1

L'associé de 768 492 s'obtient en intercalant un 0 entre le chiffre des dizaines 9 et le chiffre des unités 2, c'est donc 7 684 902.

Question 2

On peut dire que 2005 est l'associé de 205.

Question 3

a) On suppose que *n* est un entier divisible par 9. On sait alors que la somme des chiffres de *n* est un nombre divisible par 9. Or, intercaler un 0 entre deux de ses chiffres ne change rien à leur somme, donc la somme des chiffres de son associé est aussi divisible par 9.

L'associé de *n* est donc divisible par 9.

b) La réciproque de la propriété démontrée précédemment est: « Si l'associé d'un entier *n* est un nombre divisible par 9, alors *n* est divisible par 9 ».
c) Cette réciproque est vraie: la somme des chiffres de *n* est égale à la somme des chiffres de son associé donc dès que l'une est divisible par 9, l'autre l'est aussi.

Question 4

Remarque :

Énoncer une condition nécessaire et suffisante c'est énoncer une propriété équivalente à *la propriété donnée (on peut relier les deux propriétés par l'expression* « *si et seulement si* »).

Méthode par les critères de divisibilité

L'associé de *n*, noté *n'*, est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (critère de divisibilité par 4).
Or le chiffre des dizaines de *n*'est nécessairement 0, donc *n*' se termine par $\overline{0u}$, où *u* est le chiffre des unités de *n*'.
On peut donc dire que *n'*est divisible par 4 si et seulement si son chiffre des unités *u* est divisible par 4, donc si et seulement si *u'* est égal à 0, 4 ou 8.
Comme *n* et *n'* ont le même chiffre des unités alors on peut dire que l'associé de n est divisible par 4 si et seulement si le chiffre des unités de *n* est 0, 4 ou 8.

Question 5

On montre tout d'abord que le reste *r* de la division euclidienne de *n* par 5 est entièrement déterminé par le chiffre des unités de *n*, noté *u*.
Tout nombre *n* peut s'écrire sous la forme: $n = 10a + u$ où a représente le nombre de dizaines de *n*.
$10a$ est un nombre divisible par 5 donc *n* et *u* ont le même reste dans la division euclidienne par 5.
On peut en déduire que: si $0 \leq u < 5$ alors $r = u$
Si $5 \leq u \leq 9$ alors $r = u - 5$
Ainsi, on a montré que *r* est connu dès que *u* l'est.
Or, *n* et *n'* ont le même chiffre des unités, *u*.
Donc *n* et son associé ont le même reste dans la division euclidienne par 5 .

Exercice 4 Guadeloupe 2004

Question 1

Le nombre ~5~5~5~5~5~ est un nombre écrit en base 10. On en déduit que ~ est un nombre entier tel que $0 < \sim \leq 9$.
La somme des chiffres de ce nombre vaut $6 \times \sim + 25$ et doit être un multiple de 7. Comme $0 < \sim \leq 9$, on en déduit que $31 < 6 \text{ x } \sim + 25 \leq 79$.
On peut organiser la recherche à l'aide d'un tableau dans lequel on donnera pour valeurs à l'expression
$6 \times \sim + 25$ les multiples de 7 compris entre 31 et 79 ; puis on essayera de trouver des valeurs de ~ qui conviennent si c'est possible.

6 ×~+ 25	6×~	
35	10	impossible
42	17	impossible
49	24	4
56	31	impossible
63	38	impossible
70	45	impossible
77	52	impossible

La seule valeur possible est ~= 4.

Question 2a

Le nombre E97F est écrit en base 10.

On en déduit que 1≤ E ≤ 9 et que 0 ≤ F ≤ 9.

Si la somme des chiffres de ce nombre est 29 on a l'égalité suivante:E + F + 16 = 29 d'où E + F =13 donc les couples (E ; F) possibles sont:(4 ; 9), (5 ; 8), (6 ; 7), (7 ; 6), (8 ; 5), (9 ; 4).

Question 2b

Si le produit des chiffres de ce nombre est 2268, on a E× F× 9 ×7 = 2268 d'où E ×F = 2268 : 63 = 36 .

D'autre part, on sait que le nombre EF est divisible par 7.

Parmi les couples (E ; F) trouvés en question a), voici les possibilités:

E ×F = 36	EF	
4×9	49	valeur possible
9×4	94	valeur impossible car non multiple de 7

On obtient donc E = 4 **et** F = 9 ainsi le nombre cherché est donc 4 979.

Exercice 5 Lyon 2004: réponse : l'addition de Toto ne comporte aucune retenue.

Exercice 6 Besançon 2003: Soient a et b deux nombres entiers tels que : $a = \overline{xy}$ et $b = \overline{xz}$ avec $y + z = 10$

alors $a \times b = \overline{xy} \times \overline{xz} = (10x + y)(10x + z)$

$a \times b = 100x^2 + 10xy + 10xz + yz$

$a \times b = 100x^2 + 10x(y + z) + yz$

$a \times b = 100x^2 + 100x + yz$ car $y + z = 10$

$a \times b = x(x+1) \times 100 + yz$

Comme z et y sont des chiffres, $yz < 100$, le nombre de centaines de $a \times b$ est $x(x+1)$ et yz forme les deux derniers chiffres.

Règle :Le produit $a \times b$ est égal au nombre formé en juxtaposant, dans cet ordre le produit de x par $(x+1)$ et le produit de y par z (en plaçant un zéro à gauche de yz s'il n'a qu'un seul chiffre.

2. $97 \times 93 = 9021$ car $9 \times (9+1) = 90$ et $3 \times 7 = 21$

$51 \times 59 = 3009$ car $5 \times (5+1) = 30$ et $9 \times 1 = 9$

Exercice 7 Bordeaux 2003:- Soit $\overline{cdu} = 100c + 10d + u$ le nombre cherché. On sait que $c + d + u = 16$.

- Si on intervertit le chiffres des centaines et celui des dizaines on a $\overline{dcu} = \overline{cdu} + 450$ c'est à dire $100d + 10c + u = 100c + 10d + u + 450$
- Si on intervertit le chiffre des centaines et celui des unités on a $\overline{udc} = \overline{cdu} + 198$ c'est à dire $100u + 10d + c = 100c + 10d + u + 198$
- D'où le système : $\begin{cases} c + d + u = 16 \\ 90d - 90c = 450 \\ 99u - 99c = 198 \end{cases}$ en divisant par 90 la deuxième équation et par 99 la troisième : $\begin{cases} c + d + u = 16 \\ d = 5 + c \\ u = 2 + c \end{cases}$. On reporte d et u obtenus dans les 2 dernières, dans la première et on obtient $c + 5 + c + 2 + c = 16$ donc $3c = 9$ d'où c=3, $d = 8, u = 5$.
- Vérification : $3 + 8 + 5 + 16;$ $835 = 385 + 450$; $583 = 385 + 198$.

Exercice 8 Dijon 2003: a)Généralisation de la relation numérique : Soi *a* un entier supérieur ou égal à 1 :

$a \times (a+1) \times 100 + 25 = (\overline{a5})^2$ dans les exemples de l'énoncé, *a* est 6 puis 14 puis 127.

b) Vérifions cette relation dans de s exemples : $705^2 = 497\,025 = 70 \times 71 \times 100 + 25$
$85^2 = 7\,225 = 8 \times 9 \times 100 + 25$

c) démonstration de la relation : $(10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$
$(10a+5)^2 = a \times (a+1) \times 100 + 25$ on a bien

$(\overline{a5})^2 = a \times (a+1) \times 100 + 25$

Exercice 9 Rouen 2003:

1) Donnons tous les entiers naturels à un et deux chiffres divisibles par 7.
Ces entiers sont: 0, 7, 14,21,28,35,42,49,56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

2) Description et utilisation de la procédure.
a) Appliquons la procédure aux nombres 406, 895 et 3 906.

406 x2
- 12

28

895 x 2
- 10
79
3 906 x 2
- 12
378
378 x2
- 16
21

28 est divisible par 7 donc 406 l'est aussi ; 79 n'est pas divisible par 7 donc 895 non plus.
21 est divisible par 7 donc 378 l'est aussi, d'où 3 906 est divisible par 7.

b) Rédigeons un texte décrivant, dans le cas général, la procédure permettant de déterminer si un nombre entier naturel est divisible par 7.

Considérons un nombre entier naturel N. Soit a le chiffre de ses unités. Soustrayons 2a au nombre de dizaines de N. Nous obtenons un nouvel entier N'. Si N' possède plus de deux chiffres, procédons de la même façon sur N' que sur N : si a' est le chiffre de ses unités alors retirons 2a' du nombre de dizaines de N'. .
Poursuivons ainsi jusqu'à obtenir un entier n à deux chiffres. Si n est divisible par 7 alors N est divisible par 7.
Si n n'est pas divisible par 7 alors N n'est pas divisible par 7.

3) Justification.

a) Ecrivons la décomposition pour les nombres 273 et 1 856.
273 = 10 × 27 + 3   1 856 = 10 ×185 + 6

b) Exprimons en fonction de *v* et de *u* le nombre obtenu en appliquant la procédure précédente à un nombre entier naturel E.
E = 10*v* + *u* alors E' = *v - 2u*

c) Montrons que si ce nombre obtenu après application de la procédure est divisible par 7 alors E sera lui aussi divisible par 7.
Supposons que E' est divisible par 7. Alors il existe un entier naturel k tel que: $E' = v - 2u = 7k$

$E = 10v + u = 10(7k + 2u) + u = 70k + 21u$

$E = 7(10k + 3u)$

$10k + 3u$ est un entier naturel, donc E est un multiple de 7.
Par conséquent E est divisible par 7.

Exercice 10 Orléans Tours 98:

1) $\overline{132}^{6} = 1 \times 6^2 + 3 \times 6 + 2 = 56$. Ce nombre n'est pas un multiple de 6 car il n'est pas un multiple de 3 (la somme de ses chiffres en base 10 n'est pas multiple de 3). En revanche il est multiple de 2 car le chiffre des unités en base 10 est pair.

2) $\overline{324}^{6} = 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 4 = 124$, multiple de 2, pas multiple de 3.

$\overline{222}^{6} = 2 \times 6^2 + 2 \times 6 + 2 = 86$, multiple de 2, pas multiple de 3.

$\overline{550}^{6} = 5 \times 6^2 + 5 \times 6 = 66$, multiple de 2 et de 3, donc de 6.

3) $\overline{abc}^{6} = 36a + 6b + c$, et donc si c=0, c=2, c=4, on peut factoriser 36 a+ 6b +c par 2, et $\overline{abc}^{6}$ est donc multiple de 2.
Pour qu'il soit multiple de 6, il faut et il suffit que c, par définition strictement inférieur à 6, soit multiple de 6 : $\overline{abc}^{6}$ est donc multiple de 6 si et seulement si c=0

4) $\overline{abc}^{6}$ est divisible par 2 si et seulement si le chiffre des unités dans l'écriture en base 6 est pair.

$\overline{abc}^{6}$ est divisible par 6 si et seulement si le chiffre des unités dans l'écriture en base 6 est nul.

5) a) $\overline{325}^{6} = 3 \times 36 + 2 \times 12 + 5 = 125$, $\overline{212}^{6} = 80$, $\overline{555}^{6} = 215$. Le critère de divisibilité par 5 en base 10 assure que ces trois nombres sont multiples de 5 (chiffre des unités égal à 0 ou 5).

b) $\overline{abc}^{6} = 6^2 a + 6b + c = (5+1)^2 \times a + (5+1) \times b + c = 5 \times (5a + 2a + b) + a + b + c$. $\overline{abc}^{6}$ est donc divisible par 5 si et seulement si la somme des chiffres de son écriture en base 6 est un multiple de 5.

Exercice 11 Montpellier 94:

1. $\overline{113}^{a} = \overline{21}^{a} + \overline{32}^{a} \Rightarrow a^2 + a + 3 = (2a+1) + (3a+2) \Rightarrow a(a-4) = 0 \Rightarrow a = 4$ car a>0.
Réciproquement, on vérifie qu'on a bien $\overline{113}^{4} = \overline{21}^{4} + \overline{32}^{4}$

2. $\overline{26}^{b} + \overline{12}^{b} = \overline{43}^{b} \Rightarrow (2b + 6) + (b+2) = (4b+3) \Rightarrow b = 5$ qui est impossible car on ne peut avoir en base 5 un chiffre des unités égal à 6 comme c'est le cas dans $\overline{26}^{b}$. Aucune base ne convient.

Exercice 12 : Corse Nice 2000

$a = \overline{mcdu}$

Détermination du chiffre des unités u : a multiple de 45, donc a multiple de 9 et de 5. Donc u vaut 0 ou 5, or a est impair, donc u=5
Détermination du chiffre des milliers m : $m = 2c$ donc m est pair, or $a \geq 7000 \Rightarrow m \geq 7$, donc m vaut 7, 8 ou 9, donc m=8
Détermination du chiffre des centaines c : $m = 2c$ et m = 8 donc c = 4

Détermination du chiffre des dizaines d : a étant multiple de 45, c'est un multiple de 9. Donc la somme de ses chiffres est également multiple de 9. m+c+d+u=8+4+d+5=d+17.
Or $0 \le d \le 9 \Leftrightarrow 17 \le d + 17 \le 26$ entre 17 et 26, il n'y a que 18 comme multiple de 9, donc d=1
a=8415