CRPE BLANC - Corrigé

<u>Exercice 1</u> (3 points)

1.1) a) **(1 point : 0.5 résultat ; 0.5 justification)**

Un quadrillage de dix fois dix carreaux est composé de 11 alignements horizontaux de 10 allumettes et de 11 alignements verticaux de 10 allumettes ; or $11 \times 10 \times 2 = 220$: il faut donc 220 allumettes pour construire un quadrillage de dix fois dix carreaux.

b) **(1 point : 0.5 résultat ; 0.5 justification)**

Un quadrillage de n fois n carreaux est composé de $n + 1$ alignements horizontaux de n allumettes et de $n + 1$ alignements verticaux de n allumettes ; il faut donc $2n\,(n + 1)$ allumettes pour construire un quadrillage de n fois n carreaux.

<u>Remarque</u> : on retrouve bien avec cette dernière formule les résultats donnés dans l'énoncé ou obtenus dans la question a) : en effet, pour $n=2$, $2n\,(n + 1)= 2\times2\times3 = 12$; pour $n=3$, $2n\,(n + 1)= 2\times3\times4 = 24$,
et pour $n=10$, $2n\,(n + 1)= 2\times10\times11 = 220$.

1.2) (1 point : 0.5 résultat ; 0.5 justification)

Pour organiser le dénombrement, on peut classer les carrés selon la longueur de leurs côtés, exprimée en allumettes : dans un quadrillage de quatre fois quatre carreaux, il y a :

- 1 carré dont le côté mesure 4 allumettes (le quadrillage tout entier)
- 4 carrés dont le côté mesure 3 allumettes (un tel carré peut être calé dans les trois premières colonnes, ou les trois dernières, et pour chacune de ces deux possibilités, il peut être calé sur les trois premières lignes ou les trois dernières, soit 2×2 positions possibles) ;
- 9 carrés dont le côté mesure 2 allumettes (un tel carré peut être calé dans les deux premières colonnes, ou dans la deuxième et la troisième, ou dans les deux dernières, et pour chacune de ces trois possibilités, il peut être calé dans les deux premières lignes, ou dans la deuxième et la troisième, ou dans les deux dernières, soit 3×3 positions possibles)
- 16 carrés dont le côté mesure 1 allumette (les carrés « unitaires » du quadrillage).

Au total, on peut donc mettre en évidence 30 carrés dans un quadrillage de quatre fois quatre carreaux.

<u>Questions complémentaires</u> (4 points)

1.3) (1 point) On peut décrire les différents chemins possibles mais en fait, le problème revient à chercher les décompositions additives de 5, à partir des termes 1 et 2, en prenant en compte l'ordre des termes dans la somme.

On distingue alors la somme ne contenant que des « 1 », les sommes contenant un seul « 2 », qui peut alors occuper quatre positions, et les sommes contenant deux « 2 », c'est-à-dire un seul « 1 » : celui-ci peut alors occuper trois positions.

5=1+1+1+1+1 ;	5=2+1+1+1 ; 5=1+2+1+1	5=1+2+2 ; 5=2+1+2
	5=1+1+2+1 ; 5=1+1+1+2	5=2+2+1

Il y a donc huit chemins possibles.

1.4) (0,5pt)

Ce problème fait partie des problèmes pour chercher, en effet, ici, les élèves n'ont a priori aucune procédure efficace immédiatement disponible (c'est-à-dire qui aurait fait l'objet d'un entraînement), et aucune connaissance nouvelle n'est visée. (*ce n'est pas du tout une situation problème dans laquelle une connaissance nouvelle est visée*).

1.5) (0,5pt : 2x 0,25pt) IL FAUT SEULEMENT EN CITER DEUX !!!

- La compréhension de l'énoncé : (l'expression « chemins différents » peut poser des problèmes de compréhension) ;
- La présence de solutions multiples dont on ne connaît pas le nombre
- La communication de la démarche qui nécessite une organisation de la représentation ou des calculs.

- Il faut respecter deux contraintes : gravir au total 5 marches (pas plus, pas moins), et ne le faire qu'avec des de bonds d'une ou deux marches.

1.6) (2pts : 4x0,5pt)

Dans une analyse de TE, penser à dire si ce qui est fait est juste (même si la réponse finale est fausse)…

Elève A : représentation figurée, contextualisée, imagée de la situation, qui montre les différents chemins sur un même escalier. Les trois représentations (solutions) sont justes malgré quelques confusions entre « marches « et « bond » (« 2 bons » au lieu de 2 marches)

La conclusion est cohérente avec les chemins trouvés.

La surcharge du dessin peut expliquer que l'élève n'a pas poursuivi la recherche.

Elève B : L'élève a su interpréter le problème pour le résoudre par décompositions additives du nombre 5. Les opérations en colonne sont posées. C'est une démarche qui va vers l'abstraction.

Toutes les solutions sont présentes, les calculs sont organisés (trois bonds, puis cinq bonds puis quatre bonds), la conclusion est correcte.

Elève C : la représentation est très imagée (présence de la grenouille à chaque fois), deux dessins différents sont réalisés, puis traduits en écriture additive en ligne. Les opérations posées en ligne, traductions directes des dessins, sont correctes, la réponse apportée est cohérente (« 2 »). Le passage à l'addition n'a pas permis à l'élève de se construire d'autres représentations de chemins possibles. Sa réponse est fausse « 2 », tous les chemins n'ont pas été trouvés peut-être par manque de place pour les représenter.

Elève D : la représentation s'appuie sur un schéma de la situation, chaque dessin représentant un nouveau chemin. Plusieurs solutions sont trouvées, les deux premières sont correctes, les deux dernières présentent des erreurs (le total donne 6 et 7 malgré un dessin comportant 5 marches) ; il semble qu'il y ait eu confusion, certains nombres représentant des bonds, d'autres des marches.

La réponse finale est fausse. Tous les chemins n'ont pas été trouvés peut-être par manque de place pour les représenter

Exercice 2 (3 points)

2.1) (1,5pt : 0,5pt calculs + 0,5pt conjecture + 0,5pt démonstration)

Attention à la présentation des calculs : pour vérifier une égalité, on calcule séparément les deux membres puis on conclut s'il y a ou non égalité.

$4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$ $5^2 – 5 = 25 – 5 = 20$ Donc $4^2 + 4 = 5^2 – 5$	$10^2 + 10 = 100 + 10 = 110$ $11^2 – 11 = 121 – 11 = 110$ Donc $10^2 + 10 = 11^2 – 11$	$15^2 + 15 = 225 +15 = 240$ $16^2 – 16 = 256 -16 = 240$ Donc $15^2 + 15 = 16^2 – 16$

On peut alors conjecturer que $n^2 + n = (n+1)^2 - (n+1)$; on va vérifier que cette égalité est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Pour vérifier cette égalité, on développe le deuxième membre et on montre qu'il est égal au premier.

En développant le deuxième membre, on obtient : $(n+1)^2 - (n+1)= n^2 + 2n +1 – n – 1 = n^2 + n$.

L'égalité est donc vérifiée pour tout n.

2.2) (1,5 pt : 0,5pt vérification + 1pt démonstration)

215 215= 215 000 + 215 = 215 × (1000+1)= 215 x 1001, ce qui montre que 215215 est divisible par 1001..

On peut aussi effectuer la division de 215215 par 1001 ; le quotient est entier et égal à 215, le nombre est donc divisible par 1001.

Soit un nombre à trois chiffres $\overline{cdu}$ avec $0< c \leq 9$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq u \leq 9$; on forme le nombre à six chiffres $\overline{cducdu}$.

$\overline{cducdu} = \overline{cdu} \times 1000 + \overline{cdu} = \overline{cdu} \times (1000+1) = \overline{cdu} \times 1001$

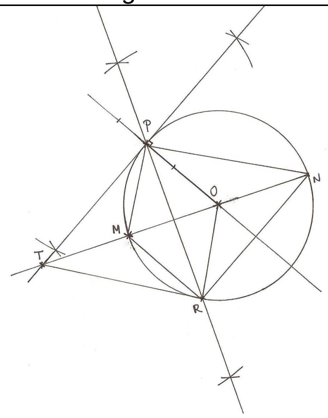
Tout nombre de cette forme est donc divisible par 1001.

Exercice 3 (4 points)

3.1) (0.25 début de la construction ; 0.25 tangente)- *0pt si les constructions au compas ne sont pas visibles*

Attention : Encore des confusions de notations entre segments, droites et longueurs des segments.

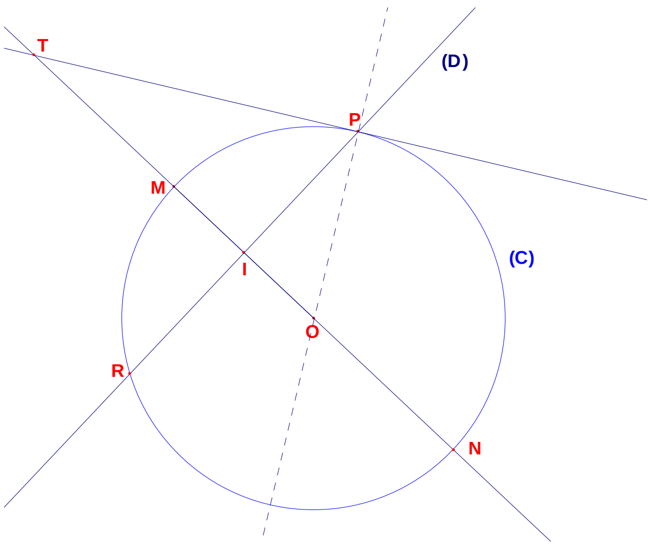
Pour construire la tangente en P au cercle c, on construit la droite (OP) ; à l'aide du compas, on place deux points Q_1 et Q_2 sur (OP), de part et d'autre de P, tels que $PQ_1 = PQ_2$, puis on construit la médiatrice du segment $[Q_1Q_2]$.



3.2) (**0.5 point :** *le programme doit permettre de réaliser la figure*)

En voici un exemple...

1. Créer un point.
2. Nommer le point O.
3. Construire un cercle de centre O et de rayon de longueur 4 cm.
4. Nommer le cercle c.
5. Construire un point sur c.
6. Nommer le point M.
7. Construire une droite passant par le point M et le point O.
8. Construire l'intersection de (OM) et de c.
9. Nommer le point N.
10. Construire le milieu du segment d'extrémités le point M et le point O.
11. Nommer le point I.
12. Construire la perpendiculaire à (OM) passant par le point I.
13. Nommer la droite (D).
14. Construire l'intersection de (D) et de c.
15. Nommer le point P.
16. Construire l'intersection de (D) et de c.
17. Nommer le point R.
18. Construire une droite passant par le point O et le point P.
19. Construire la perpendiculaire à (OP) passant par P.
20. Nommer la droite (D').
21. Construire l'intersection de (D') et de (MN).
22. Nommer le point T.



3.3) (0.75 point)

Par définition de la symétrie axiale, montrer que les points P et R sont symétriques par rapport à la droite (MN) revient à montrer que la droite (MN) est la médiatrice du segment [PR].

D'après l'énoncé, la droite (PR) est la médiatrice du segment [MO] ; les points P et R sont donc équidistants des extrémités M et O du segment [MO], (attention cela ne dit pas que P et R sont équidistants de I) On a ainsi les égalités PO = PM **et** RM = RO.

De plus, P et R sont deux points du cercle c, qui a pour centre O ; les points P et R sont donc équidistants de O : on a ainsi PO = RO, et, en utilisant les égalités précédentes, on obtient : PO = PM = RO = RM.

En particulier, on a donc PM = RM : M est donc équidistant des points P et R, ce qui prouve que M appartient à la médiatrice du segment [PR] ; de même, PO = RO, ce qui prouve que O appartient à la médiatrice du segment [PR]. La droite (MO) est donc la médiatrice du segment [PR].

Or le segment [MN] est un diamètre du cercle c dont le centre est O : les points M, O et N sont donc alignés, ou, autrement dit, les droites (MO) et (MN) sont confondues. La droite (MN) est donc la médiatrice du segment [PR]. Par conséquent, les points P et R sont symétriques par rapport à (MN).

3.4) (0,25) Au cours de la preuve de la question 3.3), on a obtenu les égalités suivantes : PO = PM = RO = RM. Les côtés du quadrilatère MPOR sont donc tous de la même longueur. Le quadrilatère MPOR est donc un losange. *(il est absolument inutile d'évoquer en plus les propriétés des diagonales, il faut choisir…)*

3.5) (0.25) D'après l'énoncé, le segment [MN] est un diamètre du cercle c, et le point P est un point de ce même cercle. Le triangle MPN est donc inscrit dans le cercle de diamètre son côté [MN] : MPN est donc un triangle rectangle en P.

3.6) (1 point) On note A_{MPNR}, A_{MNP}, A_{MNR} les mesures respectives des aires du quadrilatère MPNR, du triangle MNP et du triangle MNR. On constate que l'on a la relation : $A_{MPNR} = A_{MNP} + A_{MNR}$.

* <u>On calcule A_{MNP}.</u>

Pour cela, on note I le point d'intersection de la droite (PR) avec la droite (MO) ; comme on sait que (PR) est la médiatrice de [MO], on en déduit que le point I est le milieu du segment [MO], et que la droite (PR) est perpendiculaire à (MO).

En particulier, on a donc : (PI) $\perp$ (MN) ; dans le triangle MNP, I est donc le pied de la hauteur issue de P.

On peut alors appliquer la formule permettant de calculer l'aire d'un triangle, et on obtient : $A_{MNP} = \dfrac{\mathrm{MN}\times\mathrm{PI}}{2}$.

[MN] est un diamètre du cercle c, dont le rayon mesure 4 cm. On a donc MN = 8 cm.

Reste à calculer PI. La droite (PI) est perpendiculaire à (MN), donc à (IO) : le triangle PIO est donc rectangle en I. On peut appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle, et on obtient : $PI^2 + IO^2 = OP^2$, soit

$PI^2 = OP^2 - IO^2$.

[OP] est un rayon du cercle c, donc OP = 4 cm.

De plus, on a dit plus haut que le point I est le milieu de [MO], qui est aussi un rayon du cercle c ; on a donc IO = 2 cm.

On en déduit que $PI^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$, donc PI = $\sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = 2\sqrt{3}$ cm.

On obtient finalement : $A_{MNP} = \dfrac{\mathrm{MN}\times\mathrm{PI}}{2} = \dfrac{8\times 2\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

* <u>Pour l'aire du triangle MNR</u>, on peut faire les mêmes calculs en adaptant le raisonnement qui a été fait dans le triangle MNP au triangle MNP. On obtient, de la même manière, que $A_{MNR} = 8\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

On peut aussi utiliser un argument de symétrie : dans la symétrie d'axe (MN), on sait que les points M et N sont invariants (puisqu'ils appartiennent à l'axe), et on a vu en 3.3) que le point P a pour image le point R ; on en déduit que, dans cette symétrie, le triangle MNP a pour image le triangle MNR. Or on sait que la symétrie axiale conserve les aires : les deux triangles MNP et MNR ont donc la même aire.

En utilisant l'un ou l'autre des raisonnements, on obtient finalement le résultat suivant :

$A_{MPNR} = 2 \times 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$.

3.7) (0.75) On utilise ici la symétrie d'axe (PR) ; on la note *s*.

- Dans cette symétrie, les points P et R sont invariants (puisqu'ils appartiennent à l'axe) : *s*(P) = P ; *s*(R)=R.
- On sait que la droite (PR) est la médiatrice du segment [MO] donc les points O et M sont images l'un de l'autre : *s*(M) = O, et *s*(O) =M.

Dans la suite, on va montrer que le point T est l'image du point N.

On a vu dans la question 3.5) que le triangle MPN est rectangle en P : les droites (PM) et (PN) sont donc perpendiculaires en P.

Le point N peut donc être défini comme le point d'intersection entre la droite (MO) et la droite perpendiculaire à (PM) passant par P.

Or, dans la symétrie d'axe (PR),

- *s*(M) = O et *s*(O) =M, donc l'image de la droite (MO) est la droite (MO) elle-même ;
- *s*(P) = P et *s*(M) = O donc l'image de la droite (PM) est la droite (PO).

Dans cette symétrie, l'image du point N est donc le point d'intersection entre la droite (MO) et la droite perpendiculaire à (PO) passant par P, c'est-à-dire entre la droite (MO) et la tangente au cercle c en P : l'image du point N est donc le point T.

Par conséquent, on a : *s*(M) =O; *s*(P) = P ; s(N) = T ; s(R)=R : le quadrilatère MPNR a donc pour image le quadrilatère PORT. Comme la symétrie axiale conserve les aires, ces deux quadrilatères ont la même aire.

<u>Exercice 4</u> (2 points)

4.1) 1,25pt (-0,25par calcul oublié ou ne respectant pas la consigne ou faux)

Des expressions comme 50+75-25 et (75-25) +50 n'ont pas été considérées comme différentes…

Voici quelques exemples, il y en avait d'autres...

(avec 75)	(sans 75, avec 50)	(sans 75, ni 50)
100 = 75 +25	100 = 50 × 2	100 = 2 x 5 x 10
100 = 75 + 50 - 25	100 = 50 + 2 x 25	
100 = 75 + 5 + 2 x 10	100 = 50 + 10 x 5	
100 = 2 x 75 – 50	100 = 50 + 25 + 2 x 10 + 5	
100 = 2 x 75 – 5 x 10	100 = 2 x (50 + 25) – 5 x 10	
100 = 75 + (5- 2) x25 - 50		
100 = 50 × (5 - 2) – (75 -25)		
100 = 25 × (10 - 5) + 50 - 75		

4.2) 0,75pt (-0,25par calcul oublié ou ne respectant pas la consigne ou faux)

Voici quelques exemples, il y en avait d'autres...

(avec 75)	(sans 75, avec 50)	(sans 75, ni 50)
100 = (75-25) x (10 : 5)	100 = (25x10 - 50) : 2	100 = (25-5) × (10 : 2)
100 = 50 + 25 + 75 : (5-2)	100 = (50x10) : 5	
100 = (25 × (75+5)) : 10	100 = 25 x 5 - (50 : 2)	
100 = ((75 : 25) + 2 + 5) × 10	100 = (25 - 5) x (50 : 10)	
	100 = (50 : 5) x 10	
	100 = (5 × 50 × 10) : 25	

<u>Questions complémentaires</u> (4 points)

4.3) (1,5pt : 6x 0,25pt))

Oui pour A, B, C, D, les procédures de E et F ne présentaient pas d'intérêt compte tenu des nombres en jeu.

A. 52x4= (50+2) x4= 50x4 + 2x4=200+8=208 4 fois 50, deux cents, et 4 fois2, huit … 208

B. 52x4=52x2x2= (52x2)x2= (52+52) x2=104x2=104+104=208...52 et 52 font 104, 104 et 104 font 208

C. on peut ici s'appuyer sur la relation multiplicative qui existe entre 50 et 200, de la même manière que l'élève C s'était appuyé sur la relation liant 25 à 100 ; on aboutit ensuite au même calcul que l'élève A : . (50+2) x4= 50x4 + 2x4

D. 4x2=8 et 4x5=20 résultat 208 : Opération posée dans la tête : multiplication des unités puis des dizaines, sans retenue

E.4x(26x2)=(4x26) x2 cette procédure ne présente pas beaucoup d'intérêt ici car 4x26 ne se calcule pas spontanément à cause des retenues , ou alors on repasse par les doubles et la décomposition s'avère inutile

F. 4x (13x4) il s'agirait ici de décomposer 52 en produit de facteurs plus simples mais l'un des facteurs étant 13 les répertoires connus sont difficilement applicables directement (4x13 ??)

4.4) (0,25 pt) L'élève D n'utilise pas une technique de calcul réfléchi : il pose l'opération en colonne dans sa tête et effectue l'opération comme en calcul posé. (Cet élève ne donnant pas son résultat on ne sait pas si sa procédure aboutit)

4.5) (0,5pt) Il faut bien repartir du calcul de départ 24x4

Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition (ou soustraction)	A et C
Associativité	B (implicite), E et F
Commutativité	A, E, F

4.6) (0,75pt : 3x 0,25pt)

L'annexe étant donnée, citer UNE connaissance ou capacité en précisant, et telle qu'elle est énoncée.

- une connaissance ou une capacité mise en œuvre par les deux élèves

Organiser et effectuer mentalement un calcul multiplicatif sur des nombres entiers en s'appuyant sur des résultats mémorisés et en utilisant de façon implicite les propriétés des nombres et des opérations

- une connaissance ou une capacité mise en œuvre seulement par l'élève C

Donner une décomposition d'un nombre en utilisant 10, 100…… (4x25=100)

La capacité « évaluer un ordre de grandeur en utilisant un calcul approché » ne parait pas pertinente ici car on est bien dans du calcul exact et non approché.

- une connaissance ou une capacité mise en œuvre seulement par l'élève F.

Connaître la table de multiplication de 3 et/ou de 8 (dans le sens de la décomposition 24=3x8)

4.7) (0,5pt si réponse argumentée)

Voici un exemple…il y en a plein d'autres, l'essentiel ici est l'argumentation

305x4 : la présence du 0 peut déstabiliser l'élève au moment de la multiplication du deuxième rang 0x4

222x5 : la spontanéité du résultat 2x5 « dix » peut amener l'élève à ne pas prendre en compte les retenues dans une procédure de calcul posé…..

217x2 : il est plus simple de calculer 100x2 + 17x2 que de poser l'opération mentalement

4.8) (0,5pt si réponse argumentée)

26x3 = (25+1)x3 = 75 + 3 = 78

19x5= (20-1) x5 = 100-5 = 95

198x3= (200-2)x3 = 600-6=594

Le recours à une relation multiplicative simple (en principe mémorisée) rend cette procédure beaucoup plus efficace qu'un calcul posé effectué mentalement.