Géométrie : corrigé fiche 3

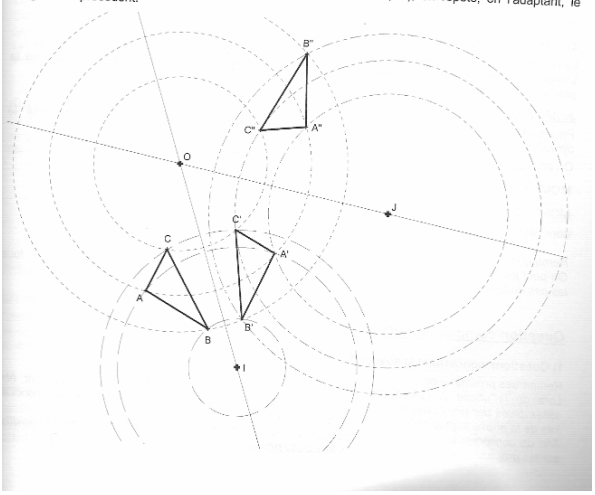
Exercice 3 (Aix-Marseille - 2006)

1) Construction à la règle et au compas des symétriques A', B' et C' des points A, B et C par rapport à la droite (OI), puis des symétriques A'', B'' et C'' de A', B' et C' par rapport à la droite (OJ)

Programme de construction du symétrique A' de A par rapport à la droite (OI) :

Choisir deux points quelconques sur (OI) (sur la figure ci-dessous, on a pris les points O et I). Tracer successivement deux cercles ayant chacun pour centre un de ces points et passant par A. Ces deux cercles se coupent en A et en A'.

Pour construire le symétrique A'' de A' par rapport à la droite (OJ), on répète, en l'adaptant, le programme précédent.



2) Il n'existe pas de symétrie axiale transformant ABC en A''B''C''

Plusieurs arguments peuvent être retenus pour justifier ce fait :

- Les triangles ABC et A''B''C'' ont la même orientation, or un triangle et son symétrique par rapport à une droite n'ont pas la même orientation, car l'un subit un retournement par rapport à l'autre.

Remarque :
En considérant le triangle comme un objet matériel coloré en blanc sur une face et en noir sur l'autre face, si pour le triangle initial, c'est la face blanche qui est visible, pour son symétrique, c'est la face noire qui est visible.

- Pour une symétrie donnée, toutes les droites qui passent par un point et son symétrique sont parallèles, car toutes ces droites sont perpendiculaires à l'axe de symétrie.
  Or, ici, on perçoit que les droites (AA''), (BB''), (CC'') ne sont pas parallèles.
- Les triangles sont orientés de telle sorte qu'on ne peut imaginer aucun pliage permettant de rabattre le triangle ABC sur le triangle A''B''C'', de façon qu'ils se superposent.
- Les segments [AA''], [BB''], [CC''] n'ont pas la même médiatrice. Or dans une symétrie axiale, tous les segments ayant comme extrémités, un point et son symétrique, ont la même médiatrice qui est l'axe de symétrie.

3) $\widehat{BOB''} = 2\,\widehat{IOJ}$

En s'appuyant sur la figure de l'énoncé, on peut écrire : $\widehat{BOB''} = \widehat{BOB'} + \widehat{B'OB''}$.

L'axe de symétrie de $\widehat{BOB'}$ est aussi sa bissectrice donc $\widehat{BOB'} = 2\,\widehat{IOB'}$.

L'axe de symétrie de $\widehat{B'OB''}$ est aussi sa bissectrice donc $\widehat{B'OB''} = 2\,\widehat{B'OJ}$

Donc $\widehat{BOB''} = 2\,\widehat{IOB'} + 2\,\widehat{B'OJ} = 2\,(\widehat{IOB'} + \widehat{B'OJ}) = 2\,\widehat{IOJ}$.

4) Transformation du plan qui transforme le triangle ABC en A''B''C''

La composée de deux symétries axiales ayant des axes sécants en O est une rotation de centre O.
L'angle de la rotation est le double de l'angle de la rotation qui permet de passer de l'axe de la première symétrie à l'axe de la deuxième symétrie.

Justification :

Pour tout point M du plan, en désignant par M' le symétrique de M par rapport à (OI) et par M'' le symétrique de M' par rapport à (OJ), on a OM = OM' et OM'= OM'' donc OM = OM''.

On peut écrire en utilisant la relation de Chasles sur des angles orientés :

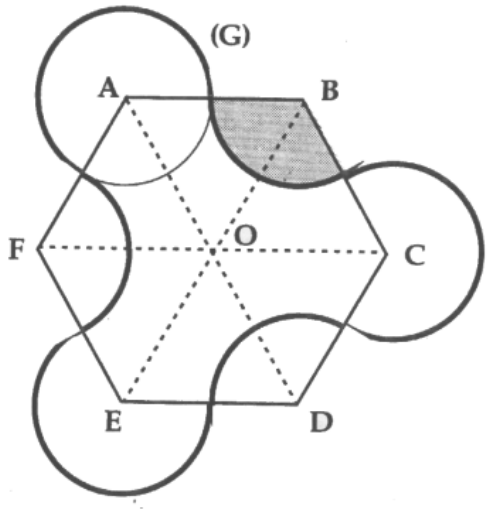
$\widehat{MOM''} = \widehat{MOM'} + \widehat{M'OM''}$

$\widehat{MOM'} = 2\,\widehat{IOM'}$ et $\widehat{M'OM''} = 2\,\widehat{M'OJ}$

donc $\widehat{MOM''} = 2\,\widehat{IOM'} + 2\,\widehat{M'OJ} = 2\,(\widehat{IOM'} + \widehat{M'OJ}) = 2\,\widehat{IOJ}$.

Remarque :
On peut justifier le résultat ci-dessus sans utiliser le concept d'angles orienté ; il suffit d'examiner tous les cas de figures selon la position des points M, M' et M'' par rapport aux droites (OI) et (OJ).

Exercice 4 (Aix Marseille 1996)



(Echelle non respectée)

1. Rappel : tracé de l'hexagone. On place un point, qu'on nomme O. On trace un cercle de centre O, de rayon égal à 2a=5 cm. On le nomme (C). On place un point sur (C), qu'on appelle A. On reporte alors le rayon de (C) cinq fois successives sur (C) ; on note B, C, D, E et F les points obtenus. Le polygone ABCDEF est un hexagone régulier.

2. Si on trace le cercle de centre A et de rayon a, on obtient deux arcs de cercles complémentaires : l'un, extérieur à l'hexagone, est inclus dans la courbe (G), l'autre, intérieur à l'hexagone, est superposable avec l'arc de cercle, de même rayon a et de centre B, inclus dans (G). La longueur de l'arc de courbe (G) constitué de l'arc de centre A et de l'arc de centre B est donc celle d'un cercle de rayon a. Le même raisonnement peut être tenu pour les arcs de centre C et de centre D, d'une part, et pour les arcs de centres E et de centre F d'autre part. La longueur de (G) représente donc 3 longueurs de cercle de rayon a, soit 3 x 2 π a ou encore 6 π a.

2. (suite)

* Le secteur circulaire de centre B, de rayon a, extérieur à (G) (ombré sur la figure) a pour aire : (120/360) × πa^2 = 1/3 × πa^2 (en effet, l'angle au centre ABC est égal à 120°, car ABC est un angle du polygone régulier). Il en est de même pour les secteurs circulaires de centre D et de centre F.
* Le secteur circulaire de centre A, de rayon a, intérieur à (G) a pour aire (240/360) × πa^2 = 2/3 × πa^2. Il en est de même pour les secteurs circulaires de centre C et de centre E.
* Pour obtenir l'aire de (S), on ajoute à l'aire de l'hexagone les aires des secteurs circulaires de centres A, C, E et l'on retranche les aires des secteurs circulaires de centres B, D, F.

L'aire de l'hexagone est égale à 6 fois l'aire du triangle équilatéral ABO, dont le côté a pour longueur 2a, On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle ABO. Comme ABO est équilatéral, la hauteur (OH) est aussi la médiane relative à [AB], et H est donc le milieu de [AB]. Le théorème de Pythagore appliqué dans le triangle rectangle AOH permet d'écrire : $OH^2 = AO^2 - AH^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$, soit OH = a$\sqrt{3}$. L'aire de l'hexagone ABCDEF vérifie donc :

$$\text{Aire (ABCDEF)} = 6\left(\frac{1}{2}\left(2a \cdot a\sqrt{3}\right)\right) = 6a^2\sqrt{3}$$

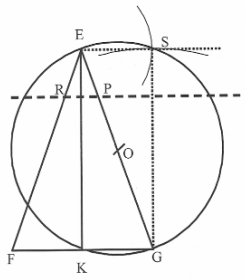
et finalement, l'aire de la surface S est égale à :

$$\text{Aire (S)} = 6a^2\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{2}{3}\pi a^2 - 3 \cdot \frac{1}{3}\pi a^2 = 6a^2\sqrt{3} + \pi a^2$$

3. Trois axes de symétries: les droites (AD), (BE) et (CF). Pas de centre de symétrie.

Exercice 5 :

Question 1
Figure en vraie grandeur



Question 2
EKG est un triangle rectangle.

Par construction, [EG] est le diamètre du cercle et K appartient au cercle. Le triangle EKG est donc rectangle car inscrit dans un demi-cercle.

Question 3
K est le milieu de [FG].

L'angle $\widehat{EKG}$ est un angle droit car le triangle EKG est un triangle rectangle. [EK] est donc la hauteur du triangle EFG, issue de E. Ce triangle étant isocèle en E, cette hauteur est à la fois médiatrice et médiane. Le point K est donc situé au milieu du segment [FG].

Question 4
Valeur exacte de EK

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EKG rectangle en K, nous avons :
$EK^2 + KG^2 = EG^2$;
$EK^2 = EG^2 - KG^2$;
$EK^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$;
$EK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (car EK est une longueur).
La valeur exacte de EK est donc $4\sqrt{2}$ cm.

Remarque :
Aucune valeur approchée n'était demandée. Il ne faut donc pas en donner, sinon le candidat peut être sanctionné.

Question 5
Construction du point S

Par définition de la translation, on sait que ESGK est un parallélogramme (deux côtés opposés parallèles et isométriques).

Il s'agit donc de tracer la parallèle en E au segment [KG] :
- tracer un arc de cercle de centre E et de rayon KG,
- tracer un arc de cercle de centre G et de rayon KE,
- ces deux arcs se coupent au point S.

Question 6
Le quadrilatère ESGK est un rectangle.

La figure ESGK est un parallélogramme. Ce parallélogramme possède de plus un angle droit en K, **c'est donc un rectangle.**

Remarque :
On aurait pu construire S comme point diamétralement opposé de K.

Question 7
ESKG est inscrit dans le cercle (C).

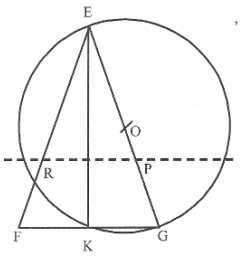
Méthode 1 :
Comme le quadrilatère est un rectangle, l'angle en S est droit. EG est l'hypoténuse du triangle SEG. Il existe donc un cercle qui passe par ces trois points et qui a pour diamètre EG. C'est le cercle (C) tracé initialement, donc **ESKG est inscrit dans ce cercle.**
Méthode 2 :
On sait qu'un rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre une diagonale, le segment [EG] est un diamètre de (C) donc **ESKG est inscrit dans le cercle(C).**

Question 8
Position du point P pour que le triangle EPR et le trapèze RPGF aient le même périmètre

La droite (PR) est parallèle à la droite (FG). Les droites (PG) et (RF) se coupent en E. D'après le théorème de Thalès dans les triangles EFG et ERP, on a donc :
$\frac{EP}{EG} = \frac{ER}{EF}$. Or EG = EF (EFG isocèle en E), donc **EP = ER.**
Or PG = EG - EP = EF - ER = RF parce que les points E, R et F (respectivement les points E, P et G) sont alignés.
Ainsi **PG = RF.**

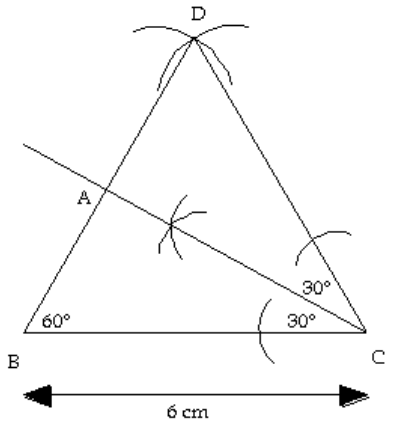
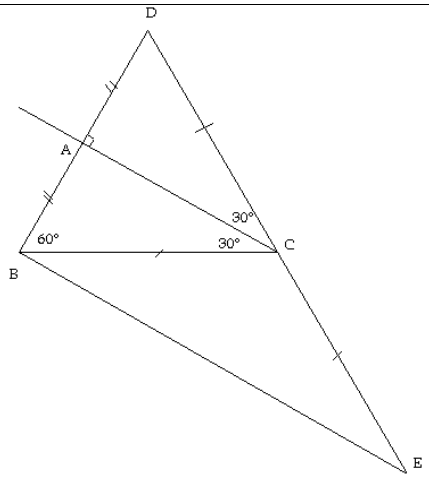
Soit x la longueur du segment [EP], x = EP et x = ER.
Soit y la longueur du segment [RP], y = RP.
Le périmètre du triangle EPR vaut 2x + y ;
Le périmètre du trapèze RPGF est RP + PG + GF + FR et on a PG = RF = 6 cm - x ;
donc le périmètre du trapèze RPGF est égal à y + (6 cm - x) + 4 cm + (6 cm - x).
Les deux périmètres sont égaux si et seulement si 2x + y = y + 2(6 cm - x) + 4 cm ;
soit 4x = 16 cm ; $x = \frac{16\ cm}{4}$; x = 4 cm.

Les deux périmètres sont égaux si et seulement si EP = ER = 4 cm, ce qui donne la figure suivante :



Exercice 6 : corrigé en classe

Exercice 7 (Lyon 1997)

1) On trace le segment [BC] tel que BC = 6 cm, puis un triangle équilatéral ayant [BC] comme côté, on note U son troisième sommet, puis on construit la bissectrice intérieure de l'angle en C. On note A le point d'intersection de cette bissectrice avec [BU]. Rq : le point U introduit pour cette construction coïncide avec le point D que l'on introduit dans la suite. 2) D est le symétrique de B par rapport à A donc A est le milieu de [BD]. La somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, le triangle ABC est rectangle en A ; (AC) est donc perpendiculaire à (AB), ou encore, puisque les points B, A et D sont alignés, à (BD). La droite (AC) coupe donc le segment [BD] perpendiculairement et en son milieu : par définition (AC) est la médiatrice de [BD]. 3) On vient de voir que la droite (AC) est la médiatrice de [BD] ; par définition de la symétrie axiale, cela signifie que D est l'image de B dans la symétrie d'axe (AC), que nous noterons *s*. Dans cette même symétrie, les points A et C sont invariants (puisque ce sont des points de l'axe). L'angle CBA a donc pour image l'angle CDA, et comme la symétrie axiale conserve la mesure des angles, on a : CDA = CBA = 60°. Le triangle BDC a donc deux angles mesurant 60° : c'est un triangle équilatéral.	
4) E est le symétrique de D par rapport à C donc C est le milieu de [BD], donc CE=CD. De plus on vient de montrer que le triangle BCD est équilatéral, ce qui signifie en particulier que BC=CD. On a donc BC=CE : le triangle BCE est isocèle en C (de plus son angle au sommet est égal à 180° - BCD = 180°-60°=120°, il n'est donc pas équilatéral). Comme BCE est isocèle avec un angle au sommet mesurant 120°, ses deux angles à la base, égaux, mesurent chacun $\frac{180° - 120°}{2} = 30°$. Ainsi CEB=30°, ou encore DEB=30°. De plus BDE = 60° (car égal à BDC, angle d'un triangle équilatéral), donc dans le triangle BED, l'angle DBE mesure donc 180°-BDE-DEB=180°-60°-30°=90°. BED est donc rectangle en B. (On peut aussi prouver que CB=CD=CE, puis que B appartient au cercle de diamètre [DE], ce qui montre que le triangle BDE est rectangle en B.)	

<u>Exercice 8</u> Aix 2005

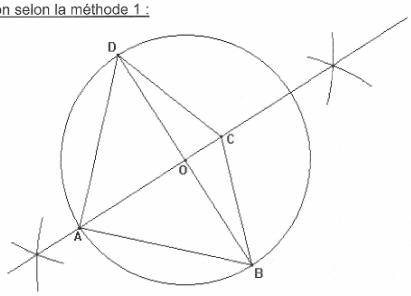
Question 1a
Construction d'un quadrilatère ABCD isocerfvolant en A

Analyse préalable à la construction :
Pour obtenir un quadrilatère ABCD isocerfvolant en A, il faut réaliser un angle droit en A et faire en sorte que la droite (AC) soit axe de symétrie de ABCD, ce qui a pour conséquence de rendre B et D symétriques l'un de l'autre par rapport à (AC).
Ainsi (AC) devient la médiatrice du segment [BD] ce qui engendre les égalités : AB = AD et CB = CD.

Méthode 1 :
On peut commencer par tracer un segment [BD] de longueur quelconque et construire sa médiatrice (Δ) qui le coupe en son milieu O, puis tracer un cercle de centre O passant par B et D. Ce cercle coupe la médiatrice en deux points, on choisit l'un de ces deux points comme point A, et comme point C on peut choisir n'importe quel point sur (Δ). En reliant les points A, B, C et D, on obtient un quadrilatère ABCD isocerfvolant en A. En effet, l'angle de sommet A est droit car c'est un angle inscrit dans un demi-cercle et la diagonale (AC) est bien axe de symétrie car c'est la médiatrice de [BD].

Méthode 2 :
On peut aussi commencer par construire un triangle ABD isocèle et rectangle en A. Pour cela, on construit deux droites perpendiculaires se coupant en A, puis on trace un cercle de centre A coupant ces deux droites, l'une en B et B', l'autre en D et D', (le choix de la position des points n'a pas d'importance). Ensuite on trace la médiatrice de [BD] qui passe par A (car A est équidistant de B et D). Enfin, on choisit un point n'importe où sur cette médiatrice : ce point est le point C, quatrième sommet de l'isocerfvolant ABCD.

Construction selon la méthode 1 :



Question 1b
Construction d'un quadrilatère avec un axe de symétrie et non isocerfvolant

Pour qu'un quadrilatère admette un axe de symétrie, sans être un isocerfvolant, il faut soit qu'il n'ait aucun angle droit, soit, s'il a un angle droit, que le sommet de cet angle droit ne se trouve pas sur son axe de symétrie.

- Si nous choisissons de construire un quadrilatère ayant un axe de symétrie sans avoir d'angle droit nous pouvons procéder de deux façons différentes au moins :

Méthode 1 :
Construire un triangle ABD isocèle en A mais non rectangle en A, puis, après avoir tracé la médiatrice de [BD], choisir le quatrième sommet C sur cette médiatrice. On obtient bien ainsi un quadrilatère ayant (AC) pour axe de symétrie mais n'ayant pas d'angle droit en A (voir figure a).

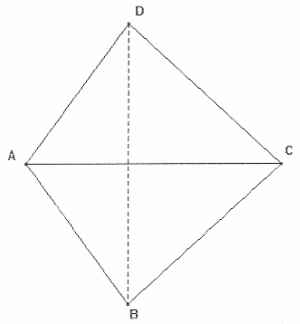


figure a

Méthode 2 :
Construire un triangle ABC quelconque (non rectangle et non isocèle), et ne possédant aucun angle mesurant 45°, puis construire le quatrième sommet D du quadrilatère comme symétrique du sommet B du triangle par rapport au côté [AC]. Ce quadrilatère possède un axe de symétrie et ne possède pas d'angle droit (voir figure a).

- Si nous choisissons de construire un quadrilatère ayant un angle droit (au moins) et dont l'axe de symétrie ne passe pas par le sommet de l'angle droit, dans ce cas un rectangle non carré convient (voir figure b).

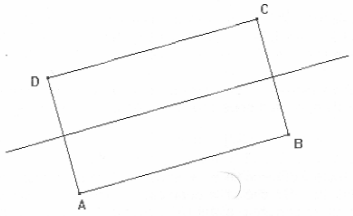


figure b

Remarque :
Comment doit-on interpréter l'expression de l'énoncé : « qui admet un axe de symétrie » ? Faut-il considérer qu'il s'agit d'un axe de symétrie et un seul, ou bien qu'il s'agit d'au moins un axe de symétrie ? Aucune précision n'étant donnée et la deuxième interprétation étant celle qui prévaut en mathématiques, un quadrilatère ayant deux axes de symétrie et n'ayant pas d'angle droit, doit être considéré comme une réponse correcte. Un losange non rectangle peut à cet égard être considéré comme une réponse convenable.

Question 2a

« Tous les carrés sont des isocerfvolants » est une **affirmation vraie** car tout carré ABCD possède un angle droit en A et sa diagonale (AC) en est un axe de symétrie du carré.

Question 2b

« Tous les rectangles sont des isocerfvolants » est une **affirmation fausse** car tout rectangle, qui n'est pas un carré, possède quatre angles droits mais aucune de ses diagonales n'est un axe de symétrie car les seuls axes de symétrie d'un rectangle non carré sont ses médianes.

Question 2c

« Tous les isocerfvolants dont les diagonales se coupent en leur milieu sont des carrés » est une **affirmation vraie** car tout quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme, si, de plus c'est un isocerfvolant :

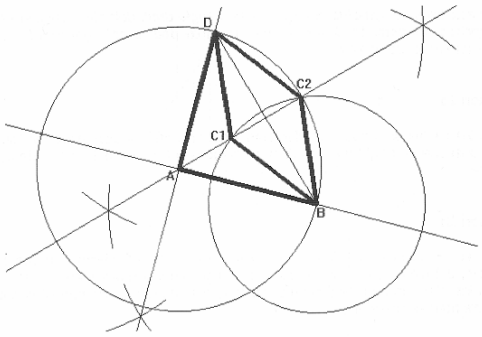
- il possède un angle droit : on peut en déduire que le parallélogramme est un rectangle ;
- il possède une diagonale qui est un axe de symétrie : on en déduit que le rectangle possède deux côtés consécutifs de même longueur et donc que c'est un carré.

Question 3a
Construction

L'angle $\widehat{BAD}$ est un angle droit, AB = 4 cm, ABCD est un isocerfvolant en A, on cherche à placer un point C du plan tel que BC = 3 cm.

Pour construire un tel quadrilatère :

- On trace un cercle de centre a et de rayon 3 cm ; on place un pont B sur ce cercle et on trace [AB]. On construit la droite perpendiculaire à (AB) passant par A ; elle coupe le cercle de centre A en deux points ; on choisit l'un d'eux comme point D. On a ainsi construit un triangle ABD rectangle et isocèle en A avec AB = 4 cm.
- On construit la médiatrice de [BD] et on trace un cercle de centre B de 3 cm de rayon. Ce cercle coupe la médiatrice en deux points, chacun de ces points peut être choisi comme point C, l'un comme sommet de l'isocerfvolant convexe, l'autre comme sommet de l'isocerfvolant non convexe.



Remarque :
La construction est possible ici car la distance de B à la médiatrice (soit $\frac{BD}{2} = 2\sqrt{2}$) est inférieure ou égale au rayon du cercle (3 cm), dans le cas contraire le cercle ne couperait pas la médiatrice et le point C n'existerait pas.

Question 3b
Valeur exacte de BD

Pour calculer la valeur exacte de BD il suffit de se placer dans le triangle ABD. Ce triangle est rectangle et isocèle en A du fait que (AC) est axe de symétrie du quadrilatère ABCD. En appliquant le théorème de Pythagore dans ce triangle on a :

$AB^2 + AD^2 = BD^2$

Donc $4^2 + 4^2 = 32 = BD^2$ donc $BD = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

La valeur exacte de BD est donc $\sqrt{32}$ ou $4\sqrt{2}$.

Remarque :
On peut aussi considérer que ABD est un demi-carré de diagonale BD et appliquer le résultat suivant « dans un carré la longueur de la diagonale est égale au produit de la longueur du côté par $\sqrt{2}$ » donc $BD = 4\sqrt{2}$

Question 3c
Aire du triangle ABD

L'aire du triangle ABD est égale au demi-produit de AB par AD soit :

$$\text{Aire ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD = \frac{1}{2} 4 \times 4 = 8$$

On a donc Aire de ABD = 8 cm².

Question 3d
Aire de l'isocerfvolant non convexe

L'aire de l'isocerfvolant non convexe ABCD qui peut être obtenu en 1a), est égale à la différence entre l'aire du triangle ABD et l'aire du triangle ACD. Il reste donc à calculer l'aire du triangle ACD. On peut l'obtenir en utilisant la formule :

$$\text{aire triangle} = \frac{(\text{base} \times \text{hauteur})}{2}$$

Si on choisit le côté BD comme base, il faut utiliser la hauteur issue de C, cette hauteur est égale à CI avec I milieu de [BD] car (CI) est la médiatrice de [BD].
On a $BI = 2\sqrt{2}$ cm ; BC = 3 cm et le triangle BCI rectangle en I.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore à ce triangle : $BI^2 + IC^2 = BC^2$

$$IC^2 = BC^2 - BI^2 = 3^2 - (2\sqrt{2})^2 = 9 - 8 = 1 \text{ donc } IC = 1 \text{ cm}$$

$$\text{Aire ACD} = \frac{(4\sqrt{2} \times 1)}{2} = 2\sqrt{2}$$

L'aire de l'isocerfvolant non convexe ABCD est donc $(8 - 2\sqrt{2})$ *cm²*.

Exercice 9 (Reims 2003)

Question 1a
Nature du triangle ABC.

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ et $100 = 10^2$
donc $6^2 + 8^2 = 10^2$
On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$
La relation de Pythagore étant vérifiée, en vertu de la réciproque du théorème de Pythagore, **le triangle est rectangle en A**.

Question 1b
Calcul de AH.

Aire(ABC) $= \frac{8 \times 6}{2}$ (en considérant le demi rectangle ACDB)

Aire(ABC) $= \frac{BC \times AH}{2} = \frac{10 \times AH}{2}$ (en prenant comme base [BC] et comme hauteur [AH])
On a donc $10 \times AH = 48$ d'où **AH = 4,8 cm**.

Question 2a
Tracer le milieu I de [BC].

On construit avec l'équerre le rectangle ABDC.
On sait que dans un rectangle les diagonales se coupent en leur milieu, donc (AD) coupe [BC] en son milieu I, d'où la construction.

Question 2b
Tracer le symétrique de A par rapport à la droite (BC).

(BC) sera la médiatrice de [AA'], donc BA' = BA et CA'= CA.
On en déduit que A' appartient au cercle de centre B passant par A, ainsi qu'au cercle de centre C passant par A. On trace ces deux cercles, ils se coupent en deux points, l'un est A l'autre est A'.
Remarque :
On ne trace pas un symétrique, mais on construit un symétrique.

Question 2c
Inscriptibilité de ABA'C dans un cercle.

La symétrie axiale étant une isométrie, elle transforme le triangle rectangle ABC en le triangle rectangle A'BC.
On sait que le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de son hypoténuse et pour diamètre cette même hypoténuse.
Le cercle circonscrit à ABC et le cercle circonscrit à A'BC ont donc tous les deux le même centre I et le même diamètre [BC]. C'est donc le même cercle. Les points A, B, A', C sont donc cocycliques.
ABA'C est donc bien inscrit dans un cercle de centre I et de rayon IB.

Question 3
Nature de ABA'B'.

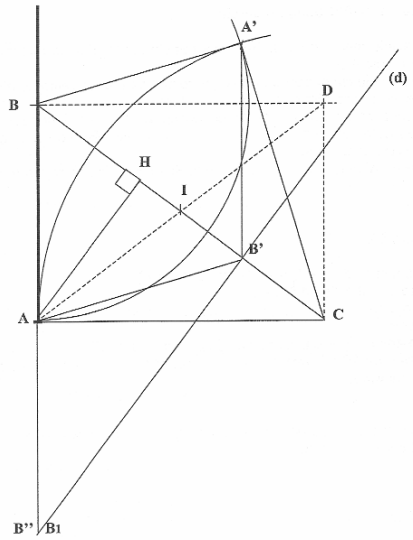
(BC) étant médiatrice de [AA'], H est le milieu de [AA'].
Par hypothèse, H est milieu de [BB'].
Le quadrilatère ABA'B' a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, c'est donc un parallélogramme.
Or A' est symétrique de A par rapport à (BC), donc AB = BA'.
Le parallélogramme ABA'B' ayant deux côtés consécutifs de même longueur, **est donc un losange**.

Remarque :
On pouvait aussi donner comme justification que les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.

Question 4
B'' appartient à (d).

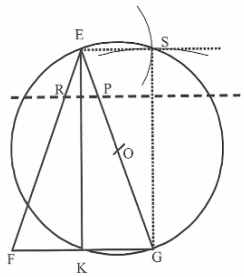
Solution 1 :
(d) étant perpendiculaire à (BC) est donc parallèle à (AH).
Soit B_1 l'intersection de (d) avec (BA).
D'après le théorème de Thalès, on a l'égalité de rapports suivante : $\frac{BB_1}{BA} = \frac{BB'}{BH}$
Or par hypothèse, BB' = 2BH. Il en découle donc que $BB_1 = 2BA$
Or par hypothèse, B'' est également situé sur (BA) et vérifie BB'' = 2BA.
Ceci montre que $B_1 = B''$.
Donc B'' appartient bien à (d).

Solution 2 :
Comme AB = AB'' par définition de B'', et que AB = AB' d'après 3), le triangle BB'B''. est inscrit dans le cercle de diamètre [BB']. Il est donc rectangle en B'. Donc (BB') est perpendiculaire à (BC). Et donc **B'' appartient à (d)**



Exercice 10 : Reims 2005

Question 1
Figure en vraie grandeur



Question 2
EKG est un triangle rectangle.

Par construction, [EG] est le diamètre du cercle et K appartient au cercle. Le triangle EKG est donc rectangle car inscrit dans un demi-cercle.

Question 3
K est le milieu de [FG].

L'angle $\widehat{EKG}$ est un angle droit car le triangle EKG est un triangle rectangle. [EK] est donc la hauteur du triangle EFG, issue de E. Ce triangle étant isocèle en E, cette hauteur est à la fois médiatrice et médiane. Le point K est donc situé au milieu du segment [FG].

Question 4
Valeur exacte de EK

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EKG rectangle en K, nous avons :
$EK^2 + KG^2 = EG^2$;
$EK^2 = EG^2 - KG^2$;
$EK^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$;
$EK = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (car EK est une longueur).
La valeur exacte de EK est donc $4\sqrt{2}$ cm.

Remarque :
Aucune valeur approchée n'était demandée. Il ne faut donc pas en donner, sinon le candidat peut être sanctionné.

Question 5
Construction du point S

Par définition de la translation, on sait que ESGK est un parallélogramme (deux côtés opposés parallèles et isométriques).

Il s'agit donc de tracer la parallèle en E au segment [KG] :
- tracer un arc de cercle de centre E et de rayon KG,
- tracer un arc de cercle de centre G et de rayon KE,
- ces deux arcs se coupent au point S.

Question 6
Le quadrilatère ESGK est un rectangle.

La figure ESGK est un parallélogramme. Ce parallélogramme possède de plus un angle droit en K, **c'est donc un rectangle.**

Remarque :
On aurait pu construire S comme point diamétralement opposé de K.

Question 7
ESKG est inscrit dans le cercle (C).

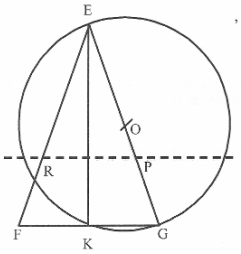
Méthode 1 :
Comme le quadrilatère est un rectangle, l'angle en S est droit. EG est l'hypoténuse du triangle SEG. Il existe donc un cercle qui passe par ces trois points et qui a pour diamètre EG. C'est le cercle (C) tracé initialement, donc **ESKG est inscrit dans ce cercle.**
Méthode 2 :
On sait qu'un rectangle est inscrit dans le cercle de diamètre une diagonale, le segment [EG] est un diamètre de (C) donc **ESKG est inscrit dans le cercle(C).**

Question 8
Position du point P pour que le triangle EPR et le trapèze RPGF aient le même périmètre

La droite (PR) est parallèle à la droite (FG). Les droites (PG) et (RF) se coupent en E. D'après le théorème de Thalès dans les triangles EFG et ERP, on a donc :
$\frac{EP}{EG} = \frac{ER}{EF}$. Or EG = EF (EFG isocèle en E), donc **EP = ER.**
Or PG = EG - EP = EF - ER = RF parce que les points E, R et F (respectivement les points E, P et G) sont alignés.
Ainsi **PG = RF.**

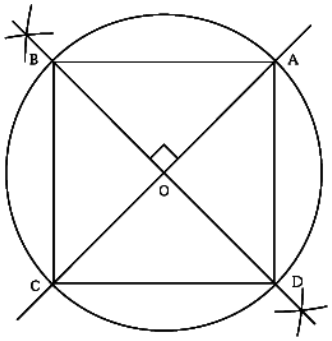
Soit x la longueur du segment [EP], x = EP et x = ER.
Soit y la longueur du segment [RP], y = RP.
Le périmètre du triangle EPR vaut 2x + y ;
Le périmètre du trapèze RPGF est RP + PG + GF + FR et on a PG = RF = 6 cm - x ;
donc le périmètre du trapèze RPGF est égal à y + (6 cm - x) + 4 cm + (6 cm - x).
Les deux périmètres sont égaux si et seulement si 2x + y = y + 2(6 cm - x) + 4 cm ;
soit 4x = 16 cm ; $x = \frac{16\ cm}{4}$; x = 4 cm.

Les deux périmètres sont égaux si et seulement si EP = ER = 4 cm, ce qui donne la figure suivante :



Exercice 11 (Limoges 2001)

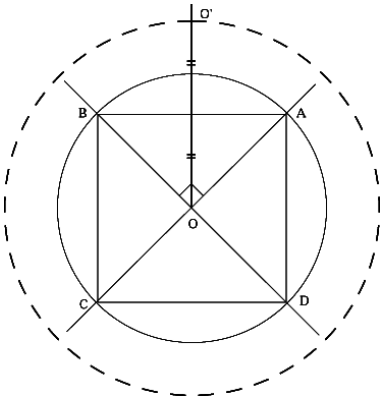
1. a) **Construction à la règle et au compas d'un carré ABCD inscrit dans le cercle.**
On place A sur le cercle puis C diamétralement opposé. On construit la médiatrice de [AC] et les deux points d'intersection avec le cercle sont les points B et D cherchés car un carré a ses diagonales orthogonales se coupant en leur milieu.



b) **Calcul de l'aire du carré ABCD.**

Soit r le rayon du cercle. Le triangle AOB est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore appliqué à ce triangle, on a $AB^2 = 2r^2$. L'aire du carré ABCD est donc $2r^2$

2. Figure décrite par O' lorsqu'on fait tourner le carré ABCD autour de O.



On a OO' = AB car OAO'B est un carré et donc ses diagonales sont de même longueur.

Justification du fait que OAO'B est un carré :

- O' est le symétrique de O par rapport à (AB) donc BO'=BO et AO'=AO (conservation des longueurs dans la symétrie).
- OA=OB (dans le carré ABCD)

D'où OA=OB=BO'=AO' : OAO'B est donc un losange.

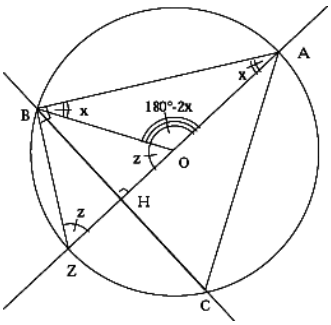
- (OA) ⊥ (OB) car les diagonales du carré ABCD sont perpendiculaires.

Le losange OAO'B a donc deux côtés consécutifs perpendiculaires : c'est un carré.

D'où OO' = $r\sqrt{2}$ et O' décrit le cercle de centre O et de rayon $r\sqrt{2}$ (tracé en pointillés sur la figure ci-dessus).

3. a) • **Construction à la règle et au compas d'un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle.**

On place A sur le cercle puis on construit le point Z diamétralement opposé. Ensuite on construit la médiatrice de [OZ]. Les deux points d'intersection avec le cercle sont les points B et C cherchés.



Justifications :
Le triangle ABZ est rectangle en B car [AZ] est un diamètre du cercle.
Le triangle OBZ est isocèle en B par construction de B.
Le triangle OBA est isocèle en O car OA = OB = r.

Notons : $\widehat{OBA} = \widehat{OAB} = x$; $\widehat{BOZ} = \widehat{OZB} = z$.

Sachant que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, on a : (180° - 2x) + z = 180°. D'où : z = 2x.
Puis on obtient dans le triangle ABZ : x + z + 90° = 180°. D'où, puisque z = 2x : 3x = 90° soit x = 30°.
Le même raisonnement peut être effectué avec le point C. On obtient alors $\widehat{OAB} = \widehat{OAH} = 30°$. La droite (OA), hauteur dans le triangle ABC, est aussi la bissectrice de $\widehat{BAC}$; c'est donc la médiatrice issue de A du triangle ABC d'où : AB = AC. De plus :

$$\widehat{BAC} = 60° \text{ donc } \widehat{BCA} = \widehat{CBA} = \frac{1}{2}(180 - 60°) = 60°$$

ABC est donc bien équilatéral.

• **Calcul de l'aire du triangle ABC.**

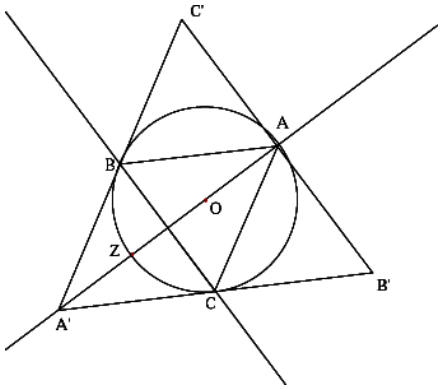
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle HOB, on a :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2$$

D'où : BC = $\sqrt{3}r$. L'aire du triangle ABC est donc égale à :

$$Aire(ABC) = \frac{1}{2}AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}r \times \sqrt{3}r = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

b) **Montrons que le triangle A'B'C' est équilatéral.**



Le triangle ABC se transforme par symétrie :

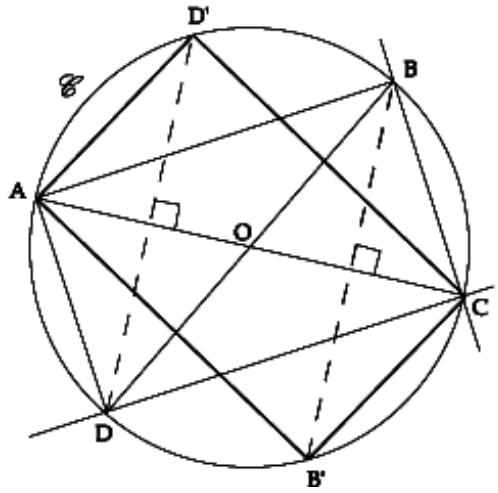
- par rapport à (BC) en A'BC qui est aussi équilatéral et dont les côtés ont même longueur que les côtés de ABC ;
- par rapport à (AB) en ABC' qui est aussi équilatéral et dont les côtés ont même longueur que les côtés de ABC.

Par conséquent, AB = A'B = BC' et $\widehat{A'BC} = \widehat{CBA} = \widehat{ABC'} = 60°$

Donc : $\widehat{A'BC'} = 3 \times 60° = 180°$.

Ainsi B est le milieu de [A'C'] avec A'C' = 2A'B = 2AB.
De la même façon on obtient :
A milieu de [C'B'] avec C'B' = 2AB,
C milieu de [A'B'] avec A'B' = 2AB.
Le triangle A'B'C' est bien équilatéral puisque A'C' = C'B' = A'B'.
Le triangle A'B'C' a comme bissectrices (AA'), (BB') et (CC') qui sont concourantes en O : le cercle initial est donc le cercle inscrit dans ce triangle.

<u>Exercice 12</u> (Créteil, Paris, Versailles 2001)


D'
B
A
O
C
D
B'

1/. Construire la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par B ; elle coupe une deuxième fois le cercle (C) au point C.

- Construire la droite perpendiculaire à la droite (BC) passant par C ; elle coupe une deuxième fois le cercle (C) au point D.
- Tracer les droites (AC) et (BD) ; elles se coupent en O.

2). Par construction, le triangle ABC est rectangle en B, donc son cercle circonscrit est le cercle de diamètre son hypoténuse [AB]. Or on sait par ailleurs que A, B et C appartiennent au cercle (C) : le cercle circonscrit au triangle ABC est donc le cercle (C), et [AB] est donc un diamètre de (C).

De la même manière, en raisonnant avec le triangle rectangle BCD, on obtient que [BD] est aussi un diamètre de (C).

Le point O, défini comme le point d'intersection des segments [BD] et [AC], est donc le point d'intersection de deux diamètres de (C) : O est le centre de (C).

3). ABCD est un rectangle (c'est un parallélogramme car ses diagonales ont le même milieu, et il a un angle droit).

4) a) Dans le triangle rectangle isocèle ABC, le théorème de Pythagore permet d'écrire $2AB^2 = AC^2$; or $AC = 2AO = 2\times5 = 10$ cm.

donc $AB^2 = 50$, donc $AB = \sqrt{50} = \sqrt{25\times2} = \underline{5\sqrt{2}\text{ cm}} \simeq 7{,}1$ cm à 1 mm près par excès.

b) L'aire du carré ABCD est égale à $\mathcal{A}_1 = AB^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25\times2 = 50\text{ cm}^2$

L'aire du disque est égale à $\mathcal{A}_2 = \pi\times OA^2 = \pi\times25 = 25\pi\text{ cm}^2$

L'aire cherchée est donc égale à $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1 = 25\pi - 50 = \underline{25(\pi-2)\text{ cm}^2}$

$\simeq 28{,}54\text{ cm}^2$ au mm² près par excès.

5/ b) Dans la symétrie d'axe (AC), les points A, O et C sont invariants (points de l'axe).

On note B' l'image de B dans cette symétrie, et D' l'image de D.

La symétrie axiale conserve les longueurs donc OB' = OB et OD' = OD.

Or OB et OD sont deux rayons de (C), donc B' et D' appartiennent aussi à (C).

Par conséquent AB'CD' est inscrit dans le cercle (C).

Exercice 13 : corrigé en classe

Exercice 14 :

Question 1 :

Le maître a choisi certaines caractéristiques communes aux deux dessins :

a- Les deux dessins sont sur un quadrillage, l'axe de la symétrie coïncide avec une ligne du quadrillage.
Ceci permet pour effectuer le tracé :

- de trouver le symétrique de quelques points de la figure en comptant les carreaux sur une ligne du quadrillage perpendiculaire à l'axe sans la difficulté du tracé des perpendiculaires sur papier blanc ;
- d'utiliser éventuellement la conservation de la direction et de la longueur des quelques segments portés par les lignes du quadrillage.

Ceci permet après-coup de valider le tracé en vérifiant :

- que chaque point et son image sont bien sur la même perpendiculaire à l'axe et à égale distance de l'axe ;
- que chaque segment et son image ont la même longueur sans utiliser un instrument de report des longueurs (compas) ou un instrument de mesure.

b- Chaque dessin est fait sur une partie quadrillée incluse dans une feuille blanche et l'axe de symétrie n'est dans aucun des cas un axe de symétrie de la partie quadrillée, ce qui permettrait des procédures de comptage de carreaux à partir des bords et non à partir de l'axe.

c- Dans chaque cas, la figure est tout entière située du même côté de l'axe ce qui est raisonnable en cycle 2, et les extrémités de tous les segments sont des nœuds du quadrillage mais :
- chaque figure comporte des segments qui ne suivent pas les lignes du quadrillage.
- aucune des deux figures ne possède un axe de symétrie parallèle à l'axe de sorte que la figure image sera nécessairement « retournée ».

Les dessins diffèrent par d'autres caractéristiques :

a- Dans le premier dessin, il s'agit de construire l'image d'un objet identifiable :un bateau. Dans le deuxième dessin ce n'est pas le cas.

b- Dans le dessin du bateau, le quadrillage est disposé de façon que ses lignes ne soient pas parallèles aux bords de la feuille blanche. L'axe de symétrie se trouve ainsi oblique dans la feuille, alors que dans l'autre dessin, il est horizontal. Cette disposition rend plus difficile une procédure de reproduction globale du bateau, d'autant plus probable que la figure représente un objet identifiable.

c- Dans le dessin du bateau, la figure est éloignée de l'axe donc il faut tracer une seconde figure bien distincte de celle qui est donnée. Dans le second dessin, la figure donnée a trois points communs avec l'axe. Le travail peut s'interpréter comme

s'il s'agissait de compléter une figure par symétrie de sorte qu'à l'arrivée il n'y ait toujours qu'une seule figure.

4- Le dessin du bateau n'a aucun axe de symétrie. L'autre dessin a un axe de symétrie perpendiculaire à l'axe imposé pour réaliser la symétrie, de sorte qu'à l'arrivée, on obtient une figure unique qui a deux axes de symétrie orthogonaux et donc un centre de symétrie.
Les élèves qui réalisent une symétrie centrale au lieu d'une symétrie orthogonale peuvent faire un dessin faux dans le premier cas et juste dans le second.

Question 2 :

Boris utilise approximativement la translation.
Dans le premier dessin, il s'agit d'une translation de 12 carreaux perpendiculairement à l'axe avec une erreur dans la conservation des longueurs dans cette direction (un carreau de trop pour la voile et la coque). Dans le deuxième dessin, il y aurait aussi une erreur d'un carreau dans la place d'une « pointe » si la transformation demandée était une translation.

Question 4 :

Antonia a respecté les propriétés suivantes :

- l'image d'un segment est un segment de même longueur ; dans le cas particulier d'un segment parallèle à l'axe ou perpendiculaire à l'axe, ce segment et son image ont la même direction ;

- il s'agit d'une isométrie négative dans le plan, en d'autres termes, l'orientation des angles change dans le plan : le calque de l'image construite ne pourra pas se superposer à la figure de départ sans sortir du plan.

En définitive, Antonia a dessiné l'image par une symétrie axiale composée avec une translation, le tout involontairement.